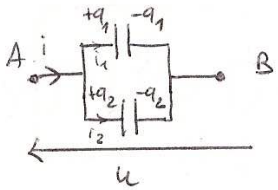
Correction Feuille n° 6.

Ex. 1 Associations de condensateurs.

1. On fait apparaître les charges.



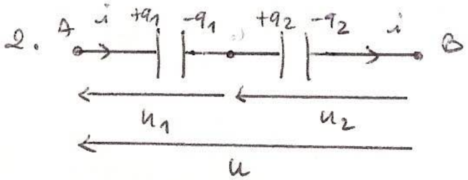
On a $u = \dfrac{q_1}{C_1} = \dfrac{q_2}{C_2}$

et $i = i_1 + i_2$ avec $i_1 = \dfrac{dq_1}{dt}$, $i_2 = \dfrac{dq_2}{dt}$

Soit $i = C_1 \dfrac{du}{dt} + C_2 \dfrac{du}{dt} = (C_1 + C_2)\dfrac{du}{dt}$

L'association de 2 condensateurs en // est équivalente à un condensateur de capacité $\underline{C_{parallèle} = C_1 + C_2}$ //

2.



$i = \dfrac{dq_1}{dt} = \dfrac{dq_2}{dt}$

(les 2 condensateurs sont parcourus par le même courant).

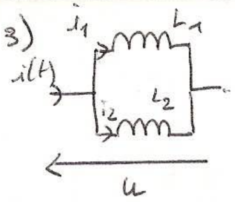
et $u_1 = \dfrac{q_1}{C_1}$, $u_2 = \dfrac{q_2}{C_2}$ et $u = u_1 + u_2$

$u = \dfrac{q_1}{C_1} + \dfrac{q_2}{C_2} \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{C_1}\dfrac{dq_1}{dt} + \dfrac{1}{C_2}\dfrac{dq_2}{dt}$

$\Leftrightarrow \dfrac{du}{dt} = \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right) i(t)$

$i(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \dfrac{du}{dt}$: Association de 2 cond en série est équivalente à un cond de capacité $\underline{C_{série} = \left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)^{-1}}$ //

3)

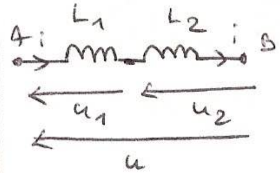


$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$

et $u = L_1 \dfrac{di_1}{dt} = L_2 \dfrac{di_2}{dt}$

soit $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{u}{L_1} + \dfrac{u}{L_2} = \left(\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}\right) u$

$\underline{L_{parallèle} = \left(\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}\right)^{-1}}$ //



$u_1 = L_1 \dfrac{di}{dt}$ et $u_2 = L_2 \dfrac{di}{dt}$

$u = u_1 + u_2 = (L_1 + L_2)\dfrac{di}{dt}$

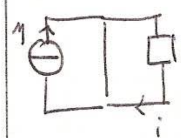
$\underline{L_{série} = L_1 + L_2}$ //

Ex. 3 Étude de quelques circuits.

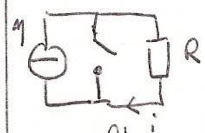
1). Rappel : en régime permanent (condensateur) $\Leftrightarrow$ (interrupteur ouvert)

et (bobine) $\Leftrightarrow$ — (court-circuit ou fil).

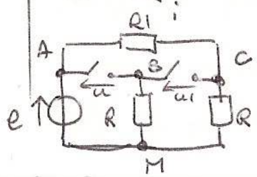
On donne le schéma équivalent des 3 circuits en régime permanent :



La résistance est en court-circuit : $i = 0$ (car la tension aux bornes de R vaut 0 et tout le courant circule dans le court-circuit).



$\underline{i = \eta}$ (aucun courant dans l'interrupteur ouvert).



Aucun courant entre B et M donc $V_B = V_M$ et d'après la loi des mailles $V_A - V_M = e$

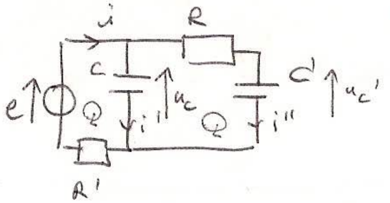
$u = V_A - V_B$ donc $\underline{u = e}$ //

$\hookrightarrow$

$$u' = V_B - V_C \Rightarrow \quad \text{et } V_C - V_M = \frac{eR}{R+R'} \quad \text{(diviseur de tension)}$$
$$= V_M - V_C$$

Ainsi : $\underline{u' = -\dfrac{eR}{R+R'}}$ //

2) Rappel : La tension aux bornes d'un cond est continue. L'intensité du courant dans une bobine est continue.

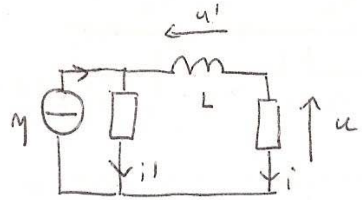


$u_c(0) = 0$ (cond. déchargé pour $t<0$)

loi des mailles : $e - R'i(0) = 0$

soit $\underline{i(0) = e/R}$ // $\underline{\text{et } i'(0) = i(0)}$

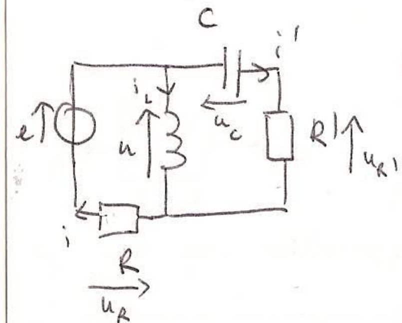
$0 - Ri'' - 0 = 0$ soit $\underline{i''(0) = 0}$



$\underline{i(0) = 0}$ (pas de courant dans la bobine pour $t<0$)

donc $\underline{u(0) = 0}$ (loi d'Ohm)

et $\underline{i'_{(0)} = \eta}$ // (loi des noeuds)



$u_c(0) = 0$; $i_L(0) = 0$

$i(0) = i_L(0) + i'(0) = i'(0)$

et $e - \cancel{R}\, u_c(0) - R'i'(0) - Ri(0) = 0$

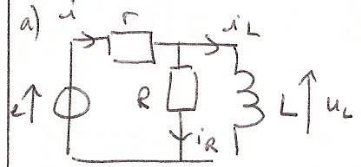
soit $\underline{\dfrac{e}{R+R'} = i'(0) = i(0)}$ //

enfin $e - u(0) - Ri(0) = 0 \iff \underline{u(0) = e - \dfrac{Re}{R+R'}}$ //

3) Il s'agit ici de trouver la réponse d'un circuit du 1er ordre ... à 2 mailles.

<u>Méthode directe</u> (<u>lois de Kirchhoff</u>).

a)



* loi des mailles :
$$\begin{cases} e(t) - r\,i(t) - R\,i_R(t) = 0 \\ u_L(t) = R\,i_R(t) \end{cases}$$

* loi des noeuds : $i(t) = i_R(t) + i_L(t)$.

* $u_L = L\dfrac{di_L}{dt}$

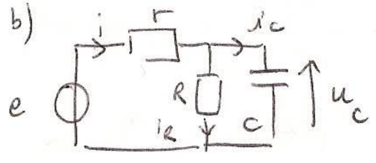
$$e(t) = r\left(i_R(t) + i_L(t)\right) + u_L(t)$$
$$= \frac{r}{R}u_L(t) + r\,i_L(t) + u_L(t)$$
$$= r\,i_L(t) + L\left(1 + \frac{r}{R}\right)\frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{e(t)}{r} = \tau\frac{di_L}{dt} + i_L(t) \quad \text{avec } \underline{\tau = \frac{L}{Rr}(r+R)} \;//$$

En utilisant la condition initiale $i_L(0) = 0$

$$\underline{i_L(t) = \frac{E_0}{r}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \;//$$

b)



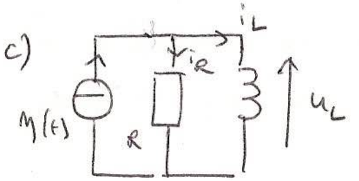
$$\begin{cases} e(t) = r\,i(t) + R\,i_R(t) \\ u_C(t) = R\,i_R(t) \\ i = i_R + i_C \quad \text{et} \quad i_C = C\dfrac{du_C}{dt} \end{cases}$$

$$e(t) = r\left(i_R + i_C\right) + R\,i_R = \left(\frac{r}{R} + 1\right)u_C + rC\frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{eR}{r+R} = u_c(t) + \tau \frac{du_c}{dt} \quad \text{avec } \tau = \frac{RC}{1 + r/R}$$

$$\underline{u_c(t) = \frac{E_0 R}{r+R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \quad \text{et } i_c = C\frac{du_c}{dt}.$$

c)



$\eta(t) = i_R(t) + i_L(t)$

et $u_L(t) = R i_R(t)$

$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt}$

soit $R i_R = L\frac{di_L}{dt}$

$\Leftrightarrow R(\eta - i_L) = L\frac{di_L}{dt}$

$\Leftrightarrow \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = \eta(t)$

$$\underline{i_L(t) = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \quad \text{avec } \tau = L/R$$

et $u_L = L\frac{di_L}{dt}$ ...

Ex.4 Étude énergétique d'un flash.

1) $T = 4{,}6 \cdot \tau$ et $\tau = RC$.

A.N. $\tau = 1000 \times 10^{-6} \times 10^{3} = 1$ s. et $\underline{T \simeq 5\text{ s}}$.

2) Énergie E_g fournie par le générateur : $\underline{E_g = CE^2}$, énergie stockée dans le condensateur en fin de charge $\underline{E_c = \frac{1}{2}CE^2}$, (démo dans le cours). $\underline{E_c = \frac{1}{2}E_g}$

3) Si $R \downarrow$, $\tau \downarrow$ et le condensateur se charge plus rapidement. En revanche l'intensité du courant va augmenter : ($i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$) et la puissance instantanée dans le condensateur aussi :

$$\mathcal{P}_{condensateur} = u_C\, i = \frac{E_0^2}{R} e^{-t/\tau}\left(1-e^{-t/\tau}\right).$$

Une puissance trop grande risque d'endommager les composants.

4) $T' \simeq 4{,}6\,\tau'$ avec $\tau' = rC$

A.N. $\tau' = 10 \times 1000 \times 10^{-6} = 10$ ms.

et $T' \simeq 50$ ms //

5) Énergie E_J dissipée par effet Joule dans le flash : $E_J = \int_0^{+\infty} r \cdot i(t)^2\, dt$.

Pendant la décharge : $u_C(t) = E\, e^{-t/\tau'}$

(en supposant le condensateur complètement chargé) et $i(t) = C\,\dot{u}_C(t) = -\frac{1}{\tau'} C E\, e^{-t/\tau'}$

$= -\frac{E}{r} e^{-t/\tau'}$

$$E_J = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{r} e^{-2t/\tau'}\, dt = \frac{E^2}{r}\left[-\frac{\tau'}{2} e^{-2t/\tau'}\right] = \frac{1}{2} C E^2$$

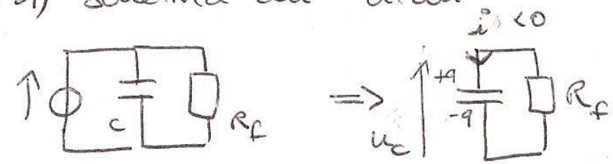
$E_J = E_C$. Toute l'énergie stockée dans le condensateur à la fin de la phase de charge est dissipée dans le flash.

Cela correspond à la moitié ($\frac{1}{2} E_g$) de l'énergie fournie par le convertisseur haute-tension.

A.N. $E_J = 0{,}5 \times 1000 \times 10^{-6} \times 360^2 = 65$ J //

Ex. 5 Mesure de la résistance de fuite du condensateur.

1) Schéma du circuit.



charge

Une fois chargé, certains électrons peuvent traverser l'isolant et conduire à un rééquilibrage des charges sur les armatures, et provoquer une baisse de la tension.

2) Cela revient à étudier le régime libre d'un circuit RC (décharge du condensateur dans une résistance).

$u_C(t) = E\, e^{-t/\tau}$ avec $\tau = R_f C$.

Ainsi : $u_C(T) = E' = E\, e^{-T/\tau}$ et $\tau = \frac{T}{\ln(E/E')}$

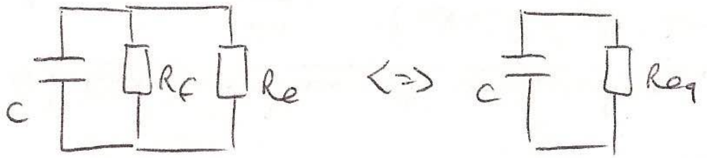
$$R_f = -\frac{T}{C}\frac{1}{\ln(1-\alpha)} > 0 \quad \text{car} \quad \ln(1-\alpha) < 0.$$

A.N. $R_f = -\frac{10}{200\times10^{-6}}\frac{1}{\ln(0{,}95)} = 975\,k\Omega \simeq 1\,M\Omega$

(on peut retenir cet ordre de grandeur pour la résistance de fuite).

3) $\ln(1-\alpha) \simeq -\alpha$ soit $R_f \simeq \frac{T}{\alpha C}$

4) Re est seulement 10 fois plus grand que Rf. Le nouveau circuit est :



$$R_{eq} = \frac{R_f R_e}{R_f + R_e}$$

On a alors $R_{eq} = \frac{T}{\alpha C}$ si $\alpha \ll 1$.

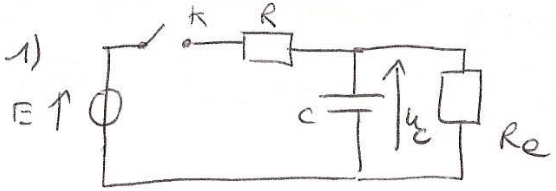
soit $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{\alpha C}{T} \Leftrightarrow \frac{1}{R_f} = \frac{\alpha C}{T} - \frac{1}{R_e}$

$$R_f = \left(\frac{\alpha C}{T} - \frac{1}{R_e}\right)^{-1}$$

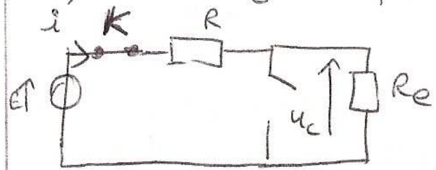
A.N. $R_f = 1{,}1\ M\Omega$

Ex.6 Étude d'un circuit à plusieurs mailles.

1)



2) En régime permanent ⊣⊢ ⇔ —/ —



Diviseur de tension :

$$u_{c_{max}} = \frac{R_e}{R+R_e}E < E$$

3) Le circuit est le même que le 2ème de l'exercice 2.3).

On trouve $\frac{E R_e}{R+R_e} = \tau \frac{du_c}{dt} + u_c(t)$ avec $\tau = \frac{R_e C}{1 + R/R_e}$

5) À $t=0$ le condensateur est déchargé : $u_c(0)=0$

$u_c(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{E R_e}{R+R_e}$ et $0 = A + \frac{E R_e}{R+R_e}$

donc $u_c(t) = \frac{E R_e}{R+R_e}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

On retrouve bien la valeur de $u_{c,max}$

$$\lim_{t\to\infty} u_c(t) = \frac{E R_e}{R+R_e}$$

6. On cherche R_e tel que $u_{c,max} < 0,99\,E$.

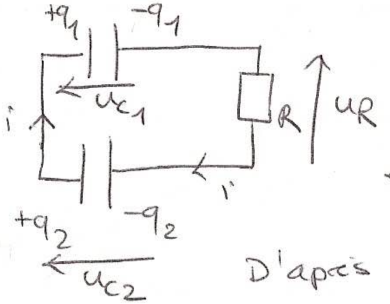
soit $\frac{R_e}{R+R_e} < 0,99 \iff R_e \times 0,01 < 0,99\,R$

$\iff \underline{R_e < 99\,R}$

si $R_e < 990\ k\Omega \simeq 1\ M\Omega$ l'écart relatif sera supérieur à 1%

Ex. 7 <u>Charge d'un condensateur à partir d'un autre.</u>

1)



Loi des mailles :

$u_{C_1} - u_{C_2} + u_R = 0$

$\iff \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} + Ri = 0$

D'après l'orientation des condensateurs on a $i = \frac{dq_1}{dt} = -\frac{dq_2}{dt}$.

Ainsi: $\frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} + R\frac{dq_1}{dt} = 0$

De plus la charge totale est conservée

$q_1(t) + q_2(t) = q_0 = cste$.

soit $q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) + R\frac{dq_1}{dt} = \frac{q_0}{C_2}$

En posant C telle que $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ et $\tau = RC$

alors $\underline{\dot{q}_1 + \frac{q_1}{\tau} = \frac{q_0}{RC_2}}$ //

on cherche des solutions sous la forme

$q_1(t) = q_{1,h}(t) + q_{1,p}(t)$

avec $q_{1,h}(t) = A e^{-t/\tau}$ solution de l'éq. homogène

et $q_{1,p}(t) = $ cste une solution particulière de l'éq complète

on choisit $q_{1,p}(t) = \frac{\tau}{RC_2} q_0 = \frac{C}{C_2} q_0$

le condensateur 2 étant initialement déchargé on a $q_2(0) = 0$ et $q_1(0) = q_0$ (la charge du condensateur, comme la tension, est continue).

Ainsi $q_1(0) = q_0 = A + q_0 \frac{C}{C_2} \Leftrightarrow A = q_0\left(1 - \frac{C}{C_2}\right)$

$$= q_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

Finalement $\boxed{q_1(t) = q_0 \frac{C_2}{C_1+C_2} e^{-t/\tau} + \frac{C_1}{C_1+C_2} q_0}$

Avec $q_2 = q_0 - q_1$ on trouve

$$\boxed{q_2(t) = q_0 \frac{C_2}{C_1+C_2} - q_0 \frac{C_2}{C_1+C_2} e^{-t/\tau}}$$

2) Avec $i = \frac{dq_1}{dt}$ on a $\underline{i(t) = -\frac{q_0}{RC_1} e^{-t/\tau}}$ // (ii)

L'énergie totale dissipée par effet Joule vaut : $E_J = \int_0^{+\infty} R i^2(t)\, dt = \frac{q_0^2}{R C_1^2} \int_0^{+\infty} e^{-2t/\tau} dt$

$$= \frac{q_0^2}{RC_1^2} \frac{\tau}{2}$$

Soit $\underline{E_J = \frac{q_0^2 C_2}{2C_1(C_1+C_2)}}$ //