Chapitre 6 : Régimes transitoires du 1er ordre

Exercice 2

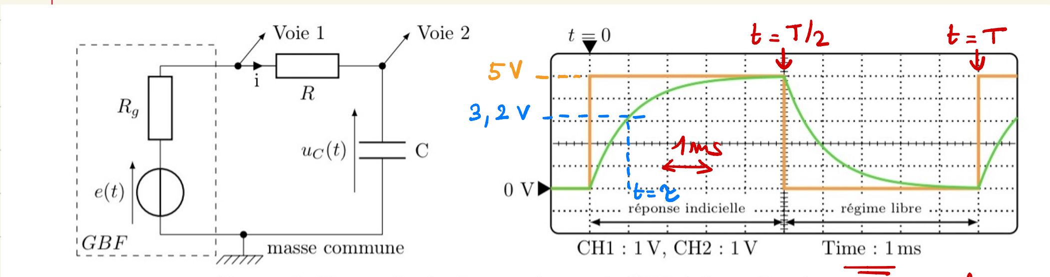
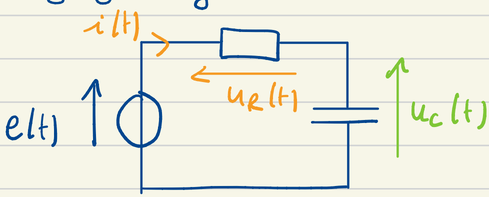


FIGURE 1. Mesures des tensions aux bornes du GBF et du condensateur.

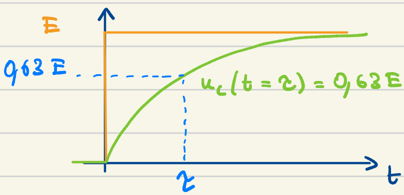
↳ échelle de temps : 1ms/division

On reconnait le circuit "RC série" étudié précédemment.
⇒ on peut négliger R_g devant R et simplifier le circuit.



1) 10 carreaux pour une période du signal créneau
1 carreau = 1 ms ⇒ $T = 10\ \text{ms}$

Pour déterminer τ on cherche le temps de réponse à 63%.



On lit sur le graphe de la Fig. 1
$\tau = 1\ \text{ms}.$

2) $\tau = RC$ donc $C = \dfrac{\tau}{R}$

A.N. $C = \dfrac{10^{-3}\ \text{s}}{10^{4}\ \Omega} = 10^{-7}\ \text{F} = 0{,}1\ \mu\text{F}$

3) La loi des mailles donne :

$$e(t) - u_R(t) - u_C(t) = 0 .$$ De plus :

$$u_R(t) = R\,i(t) \quad \text{et} \quad i(t) = C\frac{du_C}{dt}(t)$$

alors :

$$RC\frac{du_c}{dt}(t) + u_c(t) = e(t).$$

On pose $\tau = RC$ la constante de temps du circuit pour réécrire l'éq. diff. sous forme canonique :

$$\tau\frac{du_c}{dt}(t) + u_c(t) = e(t) \Rightarrow \frac{du_c}{dt}(t) + \frac{u_c(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$$

Pour $t \in [T/2, T]$ $e(t) = 0$ (régime libre)

Finalement : $$\frac{du_c}{dt}(t) + \frac{u_c(t)}{\tau} = 0 \quad , t \in [\tfrac{T}{2}, T]$$ //

4) D'après le graphe de la Fig. 1 $u_c(T/2) = E$
(la tension u_c est continue en $t = T/2$)

On résout donc : $$\begin{cases} \dfrac{du_c}{dt}(t) + \dfrac{u_c(t)}{\tau} = 0 \\ u_c(T/2) = E. \end{cases}$$

Solution générale de l'éq° diff. (homogène) :

$$u_c(t) = A e^{-t/\tau}$$

Condition initiale : $u_c(T/2) = E \Rightarrow A e^{-T/2\tau} = E$

$$\Rightarrow A = E e^{+T/2\tau}$$

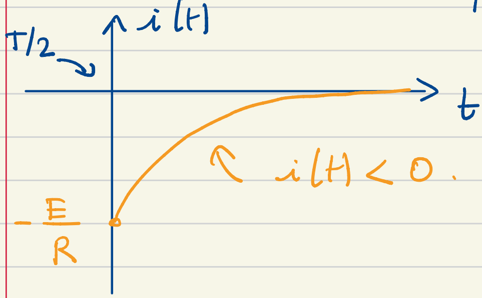
$$\Rightarrow u_c(t) = E e^{-(t-T/2)/\tau} \quad , t \geq T/2$$ //

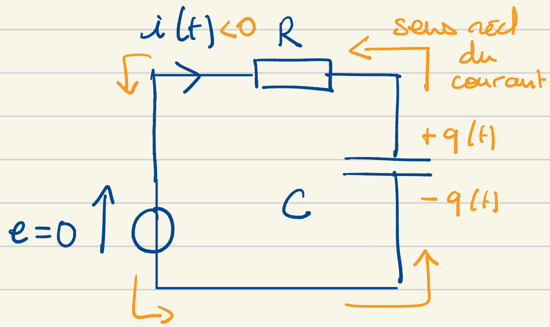
Sur le graphe on constate que la tension $u_c(t)$ décroît vers 0. (et a l'allure d'une exp décroissante).

5) $i(t) = C \dfrac{du_c}{dt}(t) = C \dfrac{d}{dt}\left(E\, e^{-(t-T/2)/\tau}\right)$

$$= CE\left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-(t-T/2)/\tau}$$

$$\Rightarrow i(t) = -\frac{E}{R}\, e^{-(t-T/2)/\tau} \quad , \; t \in \left[\tfrac{T}{2}, T\right]$$





Le condensateur se décharge

Bilan de puissance pour $t \in [T/2, T]$.

$P_g(t) = \underbrace{e(t)}_{=0}\, i(t) = 0$ puissance fournie par le générateur.

$P_R(t) = u_R(t)\, i(t) = R\, i(t)^2$ puissance reçue par la résistance.

$P_c(t) = u_c(t)\, i(t) = \dfrac{d}{dt}\left(E_c\right)(t)$ avec $E_c(t) = \frac{1}{2} C u_c(t)^2$

puissance reçue par le condensateur.

Loi des mailles : $e(t) = 0 = u_R(t) + u_c(t) \quad \times i(t)$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}_R(t) + \mathcal{P}_c(t) = 0$$

Comment l'interpréter ?

$\mathcal{P}_R(t) = R\, i(t)^2 > 0$ le carré assure ici que cette bonne vieille résistance a toujours un comportement récepteur !

$\mathcal{P}_c(t) = \underbrace{u_c(t)}_{>0}\ \underbrace{i(t)}_{<0} < 0$ puissance reçue négative, le cond. a en fait un comportement générateur !

En se déchargeant il provoque le mvt des charges électriques dans le circuit. En revanche, contrairement à une source de tension il ne peut pas maintenir le courant $(i(t) \rightarrow 0)$.

$$\Rightarrow \underbrace{\mathcal{P}_R(t)}_{>0} = \underbrace{-\mathcal{P}_c(t)}_{>0}$$

puissance reçue par la résistance (dissipée par effet Joule)

puissance fournie par le condensateur !

Bilan d'énergie

$$\mathcal{P}_R(t) = -\mathcal{P}_c(t) \Rightarrow \int_{T/2}^{T} \mathcal{P}_R(t)\,dt = -\int_{T/2}^{T} \mathcal{P}_c(t)\,dt$$

$$W_R = -\int_{T/2}^{T} R\, i(t)^2\, dt$$

$$\Delta E_c = E_c(T) - E_c(T/2) = \int_{T/2}^{T} \mathcal{P}_c(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{-\Delta E_c}_{>0} = \underbrace{W_R}_{>0}$$

en se déchargeant le condensateur cède l'énergie qu'il avait stockée sur ses armatures

l'énergie libérée par le condensateur est dissipée par effet Joule.