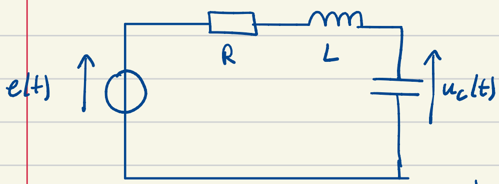
TD 7 — Exo 4. Détermination des paramètres d'un oscillateur amorti



$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(t=0) = E = 3\,V \\ \dfrac{du}{dt}(t=0) = 0 \quad \text{(tangente horizontale sur le graphe)} \end{cases}$$

Pour $t > 0$, $e(t) = 0$ (régime libre)

On rappelle que : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

1) D'après l'oscillogramme, le circuit RLC est dans le régime pseudo-périodique, puisque la tension $u_C(t)$ oscille.

En reprenant la démonstration du cours :

$$u(t) = E\,e^{-t/\tau}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)$$

avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

On en déduit la pseudo-période T des oscillations

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}}$$

avec $T_0 = 2\pi/\omega_0$ la période propre du circuit

2) Posons $f(t) = \cos(\Omega t) + \dfrac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)$ telle que :

$$u(t) = E\,e^{-t/\tau} f(t).$$

f est une fonction périodique de période T

donc $u(t+T) = e^{-(t+T)/\tau} f(t+T) = e^{-(t+T)/\tau} f(t)$

et $\dfrac{u(t)}{u(t+T)} = \dfrac{e^{-t/\tau} f(t)}{e^{-(t+T)/\tau} f(t+\tau)} = \dfrac{\cancel{e^{-t/\tau}}}{\cancel{e^{-t/\tau}} e^{-T/\tau}} \dfrac{\cancel{f(t)}}{\cancel{f(t)}} = e^{T/\tau}$

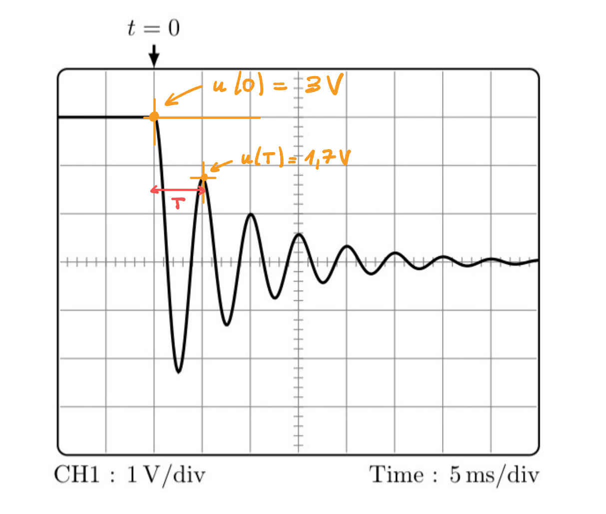
$$\Rightarrow \delta = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right) = \ln\left(e^{T/\tau}\right) = T/\tau$$

indépendant de t

De plus $\delta = \dfrac{T}{\tau} = \dfrac{\omega_0}{2Q} \dfrac{T_0}{\sqrt{1-1/4Q^2}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$

3) δ permet d'obtenir Q : $\delta^2 = \dfrac{4\pi^2}{4Q^2-1}$

$$\Leftrightarrow 4Q^2 - 1 = \frac{4\pi^2}{\delta^2} \Leftrightarrow Q = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{\delta^2}}$$



Sur le graphe on mesure (par exemple) :

$$\delta = \ln\left(\frac{u(0)}{u(T)}\right) = \ln\left(\frac{3}{1{,}7}\right) = 0{,}53$$

$$\Rightarrow Q = 5{,}9$$

De plus on mesure $T = 5$ ms

$$\Rightarrow T_0 = T\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = 4{,}98 \text{ ms}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 1{,}26 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$