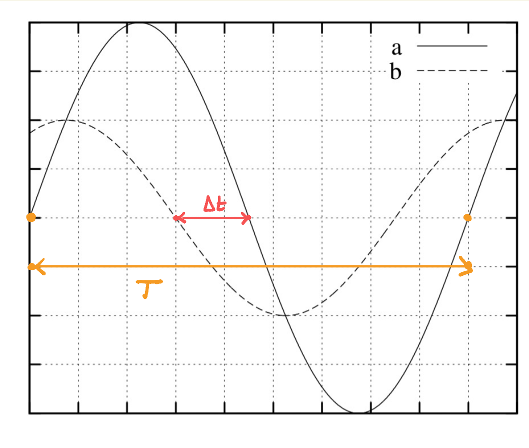
TD 8 : RSF.

Exo 2.



1) $|\varphi_{b/a}| = 2\pi \dfrac{\Delta t}{T}$

avec Δt le décalage temporel entre les 2 courbes.

et T la période des signaux.

On mesure $T = 9$ divisions $(= 9\,ms)$

et $\Delta t = 1{,}5$ divisions $(= 1{,}5\,ms)$

$\Rightarrow |\varphi_{b/a}| = 2\pi \times \dfrac{1{,}5}{9} = 2\pi \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

La courbe b est translatée de Δt vers la gauche par rapport à la courbe a.
donc $\varphi_{b/a} > 0 \Rightarrow \underline{\varphi_{b/a} = +\pi/3 \text{ rad.}}$ //

Rq : $\varphi_{b/a} \in [-\pi, \pi]$ ok .

La courbe b est en avance sur la courbe a.

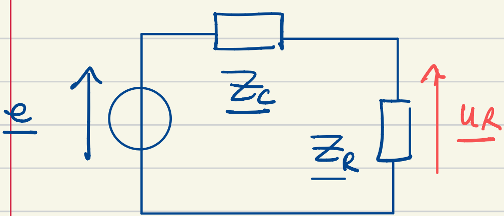
2) Les 2 tensions sont sinusoïdales, à la $\overline{m}$ période. On peut faire l'hypothèse du RSF, à la pulsation $\omega = 2\pi / T$ avec $T = 9$ ms.

On pose $e(t) = E_m \cos(\omega t)$

$$u_R(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi).$$

Représentation complexe : $\underline{e}(t) = \underline{E_m} e^{j\omega t}$; $\underline{E_m} = E_m$

et $\underline{u_R}(t) = \underline{U_m} e^{j\omega t}$; $\underline{U_m} = U_m e^{j\varphi}$



Pont diviseur de tension.

$$\underline{u_R} = \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C}} \underline{e}$$

$$\Rightarrow \underline{U_m} = \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C}} \underline{E_m} \quad \text{avec } \underline{Z_R} = R$$

$$\text{et } \underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{U_m} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{E_m} \Rightarrow \boxed{\underline{U_m} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{E_m}}$$

Posons $\tau \stackrel{.}{=} RC$

$$\underline{U_m} = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}\,\underline{E_m}$$

$$\Rightarrow U_m = |\underline{U_m}| = \frac{|j\omega\tau|}{|1+j\omega\tau|}|\underline{E_m}| \Rightarrow U_m = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\,E_m$$

On en déduit immédiatement que $U_m < E_m$ (quelque soit ω).

et donc la courbe de plus faible amplitude (la courbe b) correspond à $u_R(t)$

Calculons la phase pour verifier :

$$\varphi = \mathrm{Arg}\,\underline{U_m} = \mathrm{Arg}(\underline{E_m}) + \mathrm{Arg}(j\omega\tau) - \mathrm{Arg}(1+j\omega\tau)$$

$$= 0 + \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(\omega\tau).$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(\omega\tau)$$

$\varphi(\omega)$ est une fonction strictement décroissante et positive.

car $\mathrm{Arctan}(\omega\tau) \in [0, \pi/2]$ qd $\omega \in [0, +\infty[$

donc $\varphi > 0$

→ la courbe de u_R est en avance sur celle de $e(t)$

→ c'est bien la courbe b

3) On peut utiliser la phase ou l'amplitude.

Amplitude : On mesure $\frac{U_m}{E_m} = \frac{1}{2}$ pour $T = 9$ ms.

donc $\frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\omega\tau)^2 = \frac{1}{4}\left(1+(\omega\tau)^2\right)$

$\Rightarrow (\omega\tau)^2 = 1/3$

$\Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega\sqrt{3}} \Rightarrow \tau = \frac{T}{2\pi\sqrt{3}}$

$\Rightarrow RC = \frac{T}{2\pi\sqrt{3}}$

$\Rightarrow C = \frac{1}{R}\,\frac{T}{2\pi\sqrt{3}}$

AN : $C = \frac{1}{100} \times \frac{1}{2\pi} \times \frac{9 \times 10^{-3}}{\sqrt{3}}$

$C = 8{,}3 \times 10^{-6}$ F //

Phase :

$$\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(\omega\tau) = \pi/3 \Rightarrow \mathrm{Arctan}(\omega\tau) = \frac{\pi}{6}$$

$$\omega\tau = \tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \underline{\omega\tau = \pi/3}$$

$\Rightarrow$ On obtient la même eq° pour τ qu'avec l'amplitude.