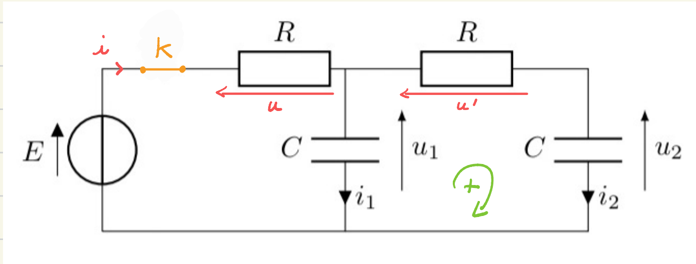
Exo 6



1) Continuité de la tension aux bornes des condensateurs :

$u_1(t) = u_2(t) = U_0$ pour $t < 0$ donc $u_1(t=0) = u_2(t=0) = U_0$ //

Loi des mailles dans la maille de droite : $u_1 - u' - u_2 = 0$

or $u' = R i_2$ donc à $i_2 = \dfrac{u_1 - u_2}{R}$

à $t = 0$: $i_2(t=0) = \dfrac{u_1(t=0) - u_2(t=0)}{R} = 0$

car $u_1(t=0) = u_2(t=0) = U_0$

or $i_2(t=0) = C \dfrac{du_2}{dt}(t=0)$ donc $\dfrac{du_2}{dt}(t=0) = 0$ //

2) 7 inconnues : $i, i_1, i_2, u, u', u_1, u_2$

4 relations caractéristiques (relations courant - tension) :

$\rightarrow$ 2 lois des mailles + 1 loi des noeuds $\Rightarrow$ 7 équations

Relations caractéristiques :

$$i_1 = C\frac{du_1}{dt} \quad ; \quad i_2 = C\frac{du_2}{dt} \quad ; \quad u = Ri \quad ; \quad u' = Ri_2$$

Loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$ (1)

Loi des mailles : $E - u - u' - u_2 = 0$ (grande maille) (2)

$u_1 - u' - u_2 = 0$ (maille de droite) (3)

(2) $E = Ri + Ri_2 + u_2$

$\Rightarrow E = R(i_1 + i_2) + Ri_2 + u_2$

$\Rightarrow E = R\left(C\frac{du_1}{dt} + C\frac{du_2}{dt}\right) + RC\frac{du_2}{dt} + u_2$

$\Rightarrow E = RC\frac{d}{dt}(u' + u_2) + RC\frac{du_2}{dt} + RC\frac{du_2}{dt} + u_2$

$= RC\frac{d}{dt}(Ri_2) + 3RC\frac{du_2}{dt} + u_2$

$\Rightarrow E = (RC)^2\frac{d^2u_2}{dt^2} + 3RC\frac{du_2}{dt} + u_2$

$\Rightarrow \frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}u_2 = \frac{E}{(RC)^2}$

On pose : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ // et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC}$ $\Rightarrow Q = \frac{RC}{3}\omega_0 = \frac{1}{3}$ //

$Q = 1/3 \Rightarrow$ régime apériodique.

Polynôme caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 \Rightarrow$ discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) > 0.$

racines : $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$; $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

Solution générale de l'éq° sans second membre :

$$u_{ssm}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Solution particulière de l'éq° avec second membre :

$$u_p(t) = E$$

$\Rightarrow$ solution générale : $u_2(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + E$.

$$\Rightarrow \frac{du_2}{dt} = Ar_1 e^{r_1 t} + Br_2 e^{r_2 t}$$

C.I. $\begin{cases} u_2(t=0) = U_0 \\ \frac{du_2}{dt}(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + E = U_0 \\ Ar_1 + Br_2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(1 - r_1/r_2) = U_0 - E \\ B = -A\frac{r_1}{r_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{(U_0 - E)r_2}{r_2 - r_1} \\ B = -\frac{(U_0 - E)r_1}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

$$u_2(t) = E + \frac{U_0 - E}{r_2 - r_1}\left(r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}\right)$$