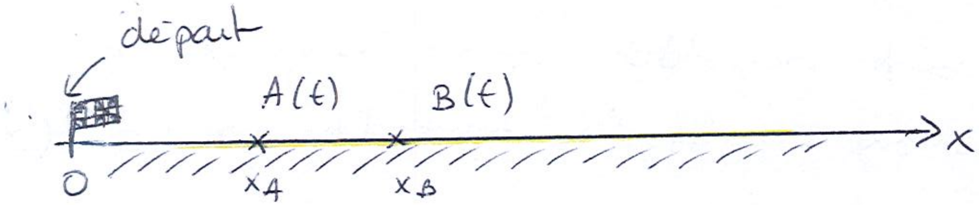
Feuille d'exercices n° 14.

Ex. 2 Course cycliste

D'emblée on commence par préciser le référentiel d'étude du mvt. On choisit le référentiel lié à la route.

$\hat{R}$

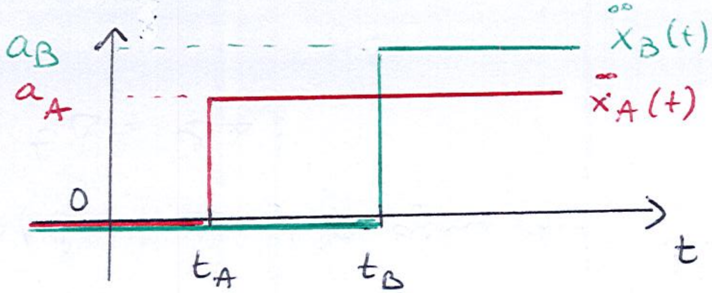
On introduit le repère cartésien $(O, \vec{u}_x)$ le long de la route (la course a lieu en ligne droite).



On a
$$\begin{cases} \vec{a}_A(t) = \ddot{x}_A(t)\,\vec{u}_x \\ \vec{a}_B(t) = \ddot{x}_B(t)\,\vec{u}_x \end{cases}$$

Soit t_A l'instant auquel démarre Alice

et $t_B > t_A$ l'instant auquel démarre Bertrand.



Pour $t \geq t_A$ on a $\ddot{x}_A(t) = a_A$

$t \geq t_B$ on a $\ddot{x}_B(t) = a_B$

On a alors $\dot{x}_A(t) = a_A t + C_1$

et $\dot{x}_A(t_A) = 0$ (A démarre en $t = t_A$ et la vitesse est continue.

alors $\dot{x}_A(t) = a_A(t - t_A)$ //

et $x_A(t) = \frac{1}{2} a_A (t - t_A)^2 + C'_1$

or $x_A(t_A) = 0$ donc $C'_1 = 0$

$$x_A(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} a_A (t - t_A)^2 & t \geq t_A \\ 0 & t < t_A \end{cases}$$

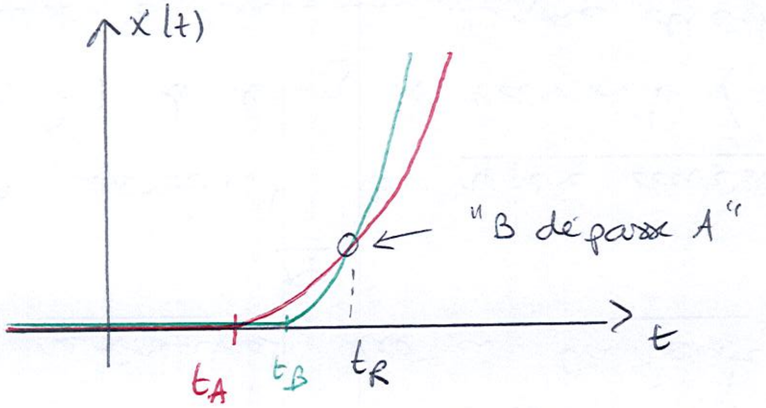
//

Pour Bertrand le raisonnement est le même mais le départ en $t_B > t_A$

on a alors $x_B(t) = \frac{1}{2} a_B (t - t_B)^2 \quad t \geq t_B$

$= 0 \quad t < t_B$

2) On peut représenter graphiquement la situation en se rappelant que $a_B > a_A$ et $t_B > t_A$



On note t_R l'instant auquel B rattrape A. On résout l'éq° :

$$x_B(t_R) = x_A(t_R)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} a_B (t_R - t_B)^2 = \frac{1}{2} a_A (t_R - t_A)^2$$

$$\sqrt{a_B}\,(t_R - t_B) = \sqrt{a_A}\,(t_R - t_A)$$ (ok car $t_R > t_A$ et $t_R > t_B$)

$$t_R = \frac{\sqrt{a_B}\, t_B - \sqrt{a_A}\, t_A}{\sqrt{a_B} - \sqrt{a_A}} \quad (1)$$

En réalité on cherche la durée $t_R - t_B$:

$$t_R - t_B = \frac{\sqrt{a_B}\, t_B - \sqrt{a_A}\, t_A}{\sqrt{a_B} - \sqrt{a_A}} - t_B$$

$$t_R - t_B = \frac{\sqrt{a_A}\,(t_B - t_A)}{\sqrt{a_B} - \sqrt{a_A}} = \frac{t_B - t_A}{\sqrt{\frac{a_B}{a_A}} - 1} \quad (2)$$

Rq : L'expression (2) est meilleure que la (1) car l'énoncé donne $t_B - t_A = 1\,s$.

Pour utiliser (1) on peut fixer $t_A = 0$ (choix de l'origine des temps) et prendre $t_B = 1\,s$.

A.N. $a_A = 1\ m.s^{-2}$
$a_B = 2\ m.s^{-2}$

$$t_R - t_B = \frac{4}{\sqrt{2} - 1} = \underline{2,4\ s.}$$

3). Alice a parcouru la distance :

$$d_A = x_A(t_R) = \frac{1}{2} a_A (t_R - t_A)^2 = \ ?$$

$$t_R - t_A = t_R - t_B + t_B - t_A \simeq 3,4\ s$$

$$\left(\text{ou} \quad t_R - t_A = \frac{\sqrt{a_B}(t_B - t_A)}{\sqrt{a_B} - \sqrt{a_A}} = \frac{t_B - t_A}{1 - \sqrt{\frac{a_A}{a_B}}} = \dots \right)$$

$$d_A = x_A(t_R) = 0,5 \times 1 \times (3,4)^2 = \underline{5,78\ m.}$$

Bertrand a parcouru :

$$d_B = x_B(t_R) = \frac{1}{2} a_B (t_R - t_B)^2$$

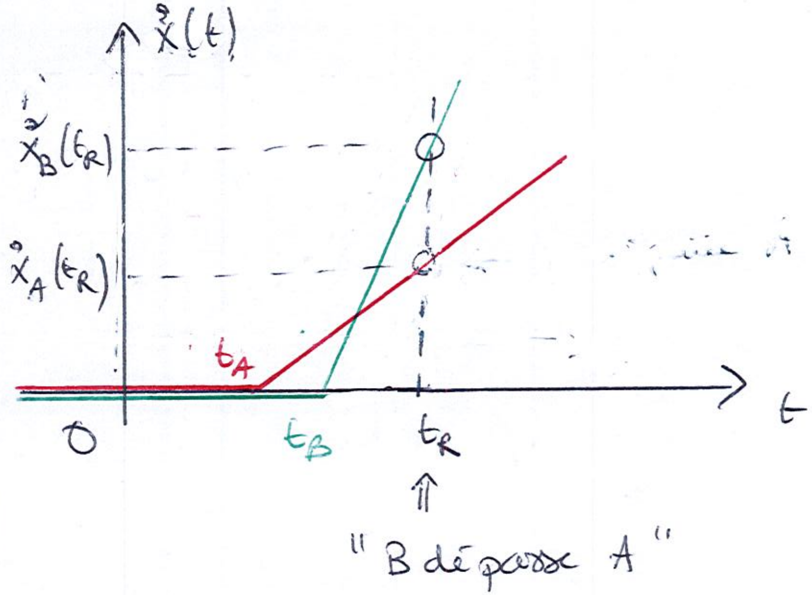
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times (2,4)^2 = 5,\dots m.$$

$\underline{d_B = d_A}$! ☺

②

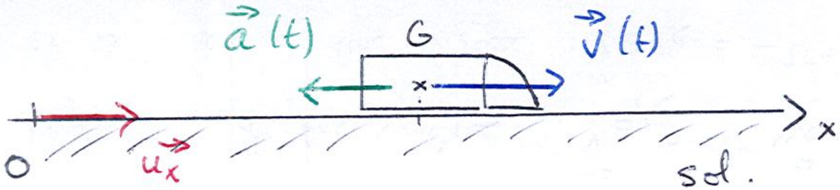
$$\dot{x}_A(t_R) = a_A(t_A - t_R) = 0,5 \times 3,4 = \underline{1,7\ m.s^{-1}}$$

$$\dot{x}_B(t_R) = a_B(t_R - t_B) = \dots \times 2,4 = \underline{2,4\ m.s^{-1}}$$



Ex 3 : Distance d'arrêt.

1)



On étudie le mvt du train dans le référentiel lié au sol.

On repère la position $\vec{OG} = x(t)\,\vec{u_x}$ du centre d'inertie du train. Le train roule ds le sens des x croissants, donc $\dot{x}(t) > 0$.

À l'instant $t = 0$, le train commence à freiner.

Pour $t > 0$ on a donc $\vec{a}_G = \frac{d^2\vec{OG}}{dt^2} = [illegible]\,\vec{u_x}$

avec $a_0 < 0$ //

On résout l'éq° diff : $\ddot{x}(t) = a_0$

avec $\dot{x}(0) = V_0 > 0$

$x(0) = 0$

(on suppose que le train freine à partir du moment où G passe par l'origine O du repère).

$\Rightarrow \dot{x}(t) = a_0 t + V_0$ // et $x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + V_0 t$ //

2) Le train s'arrête à l'instant t_f : $\dot{x}(t_f) = 0$

soit $a_0 t_f + V_0 = 0 \iff t_f = -\frac{V_0}{a_0} > 0$ (3)

(car $a_0 < 0$).

Pour déterminer a_0 on utilise la donnée de la distance d'arrêt : $d_f = 3$ km.

On a $x(t_f) = d_f = \frac{1}{2}a_0 t_f^2 + V_0 t_f$

$= \frac{1}{2}a_0 \frac{V_0^2}{a_0^2} + V_0\left(-\frac{V_0}{a_0}\right)$

$d_f = -\frac{1}{2}\cdot\frac{V_0^2}{a_0} > 0$

Soit $a_0 = -\frac{V_0^2}{2d_f}$ //

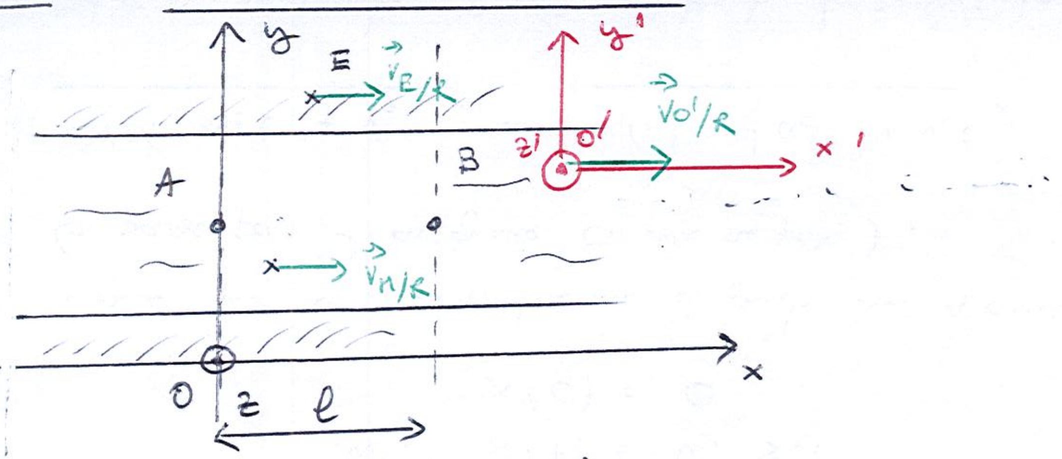
et $t_f = -\frac{V_0}{a_0} = +\frac{2\,[illegible]}{V_0}$ //

A.N. $t_f = 2\cdot\frac{3\text{ km}}{300\text{ km.h}^{-1}} = 0{,}02\text{ h} = 1\text{ min }12\text{ s}$

(Pour info $|a_0| = \frac{(300)^2}{2\times 3} = 1{,}5\cdot 10^4\text{ km.h}^{-2}$

$= 1{,}2\text{ m.s}^{-2}$

Ex 4 : Aller et retour sur un fleuve.



On introduit 2 référentiels :

R : référentiel lié à la berge, matérialisé par les axes (Oxyz)

R' : référentiel lié au fleuve (imaginez un flotteur en O' se déplaçant à la vitesse

$$\vec{V}_{O'/R} = u\,\vec{u_x} \qquad (u>0))$$

matérialisé par (O', x', y', z') dans le référentiel R.

L'entraîneur E se déplace à la vitesse se déplace à la vitesse $\vec{V}_{E/R} = v\,\vec{u_x}$ entre A et B et à la vitesse $\vec{V}_{E/R} = -v\,\vec{u_x}$ entre B et A

Le rameur se déplace à la vitesse par rapport au fleuve, càd ds le référentiel R'

Sa vitesse dans le référentiel R est :

⊛ $\vec{V}_{M/R} = (u+V)\,\vec{u_x}$ entre A et B

⊛ $\vec{V}_{M/R} = (u-V)\,\vec{u_x}$ entre B et A

(à contre-courant)

Le temps de parcours t_E du point E est donné par : $t_E = \frac{\ell}{v} + \frac{\ell}{v} = \frac{2\ell}{v}$

aller retour

Le temps de parcours t_M du pt M est donné par : $t_M = \frac{\ell}{u+V} + \frac{\ell}{|u-V|}$

aller retour.

Pour que M puisse remonter le courant il faut nécessairement : $u - V < 0$

soit $V > u$.

Ainsi : $t_M = \dfrac{\ell}{u+v} + \dfrac{\ell}{v-u} = \dfrac{2v\ell}{v^2-u^2}$

$$= \frac{2\ell/v}{1-u^2/v^2} = \frac{t_E}{1-\frac{u^2}{v^2}}$$

le rameur et l'entraineur auraient finalement au pt A avec un écart :

$$t_M - t_E = t_E\left(\frac{1}{1-\frac{u^2}{v^2}} - 1\right) = \frac{u^2}{v^2-u^2}\,t_E$$

$t_M - t_E \geq 0$. Conformément à l'intuition (ou pas ?)

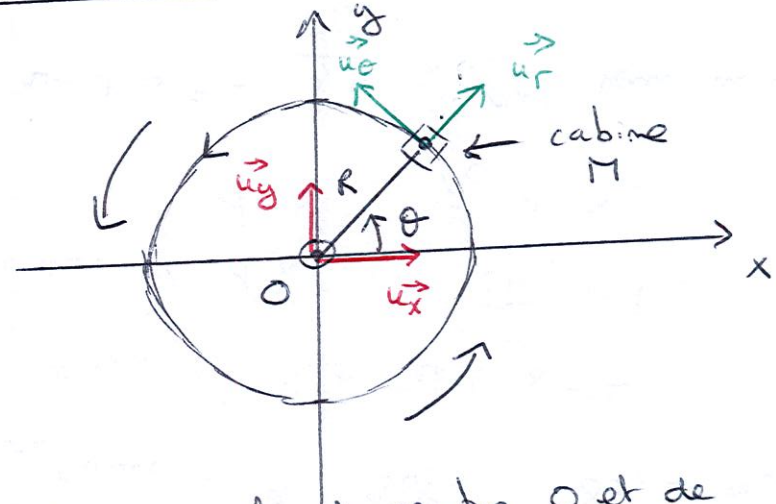
le temps gagné à l'aller par le rameur est plus que perdu au retour !

Rq : $u = 0$ (cas d'un lac par ex.) alors $t_M = t_E$ ☺

$u \to v$ $\quad t_M - t_E \to +\infty$ le rameur ne peut pas rejoindre le pt A au retour !

Ex 5 :

1) La cabine assimilée à un pt matériel M décrit une trajectoire circulaire dans le référentiel lié au sol :



Trajectoire : cercle de centre O et de rayon R.

2) On introduit le système de coord. polaires (r,θ) et la base de projection $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ associée représentée sur le schéma

$r(t) = R = cste$ et $\dot{\theta}(t) = \omega = cste$

$\vec{OM} = R\,\vec{u_r}$ et $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} = R\omega\,\vec{u_\theta}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u_\theta}$$

$$\vec{a} = -R\omega^2 \vec{u_r} \quad //$$

accélération radiale.

(Rq : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega\vec{u_\theta}) = R\omega \frac{d}{dt}(\vec{u_\theta}) = -R\omega\dot{\theta}\vec{u_r}$
$= -R\omega^2\vec{u_r}$)

En coord. cartésiennes :

$$\begin{cases} x(t) = R\cos\theta(t) \\ y(t) = R\sin\theta(t) \end{cases}$$

On a $\dot{\theta}(t) = \omega = cste$ donc $\theta(t) = \omega t + cste$.

En prenant arbitrairement $\theta(0) = 0$

on trouve $\theta(t) = \omega t$ et $\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \end{cases}$ //

vitesse : $\begin{cases} \dot{x}(t) = -R\omega\sin(\omega t) \\ \dot{y}(t) = R\omega\cos(\omega t) \end{cases}$ //

acc. $\begin{cases} \ddot{x}(t) = -R\omega^2\cos(\omega t) \\ \ddot{y}(t) = -R\omega^2\sin(\omega t) \end{cases}$ //

Rq : $\vec{v}(t) = R\omega(- \ldots \theta(t)\vec{u_x} + \cos\theta(t)\vec{u_y})$
$= -R\omega\vec{u_\theta}$ ok

$\vec{a} = -R\omega^2(\cos\theta(t)\vec{u_x} + \sin\theta(t)\vec{u_y})$
$= -R\omega^2\vec{u_r}$ ok

9) $a_{max} = \|\vec{a}_{max}\| = 9g$

$R\omega_{max}^2 = a_{max} \Rightarrow \omega_{max} = \sqrt{\frac{a_{max}}{R}}$ //

A.N. $a_{max} = 9 \times 9{,}81 = 88{,}3 \text{ m.s}^{-2}$

$\omega_{max} = 3{,}6 \text{ rad.s}^{-1}$

Conversion : $1 \text{ tour} = 2\pi \text{ rad}$.
$1 \text{ s} = \frac{1}{60} \text{ min}$.

$3{,}6 \text{ rad.s}^{-1} = \frac{3{,}6}{2\pi} \times 60 \text{ tour.min}^{-1}$
$= 34 \text{ tour.min}^{-1}$. //

Rq : En cas de retour catastrophique du vaisseau Soyouz dans l'atmosphère un astronaute doit pouvoir piloter en manuel à 9 ou 10 g !

Ex 6 : Hélice.

1). Lorsque θ augmente de 2π (tour complet dans l'escalier) z augmente de h (montée d'un étage).

Soit $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$ alors $\theta(t+\Delta t) = \omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)$

$= \theta(t) + 2\pi$

et $z(t+\Delta t) = b\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = bt + \frac{2\pi}{\omega} b = z(t) + h$

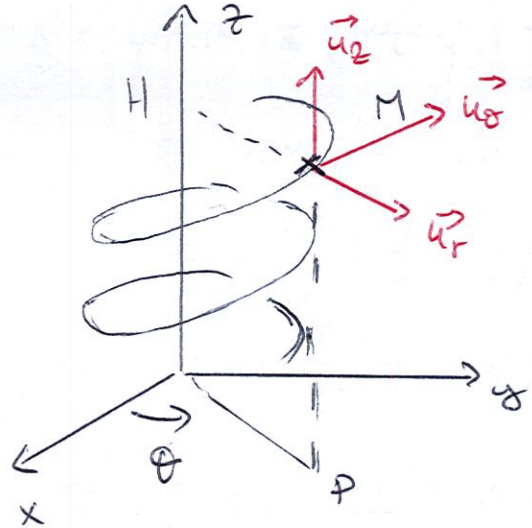
Ainsi $h = \frac{2\pi}{\omega} b$ 1

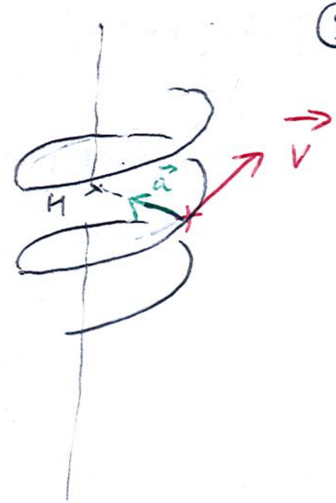
2) $\vec{OM} = r(t)\,\vec{u_r} + z(t)\,\vec{u_z} = R\,\vec{u_r} + bt\,\vec{u_z}$ 1

$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R\,\frac{d\vec{u_r}}{dt} + b\,\vec{u_z} = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + b\,\vec{u_z}$

$\vec{v} = R\omega\,\vec{u_\theta} + b\,\vec{u_z}$ 1

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2\,\vec{u_r}$ 1 car $\frac{d(bz)}{dt} = 0$





En coordonnées cartésiennes :

$\vec{u_r} = \cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y}$

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \\ z(t) = bt \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = -R\omega\sin(\omega t) \\ \dot{y}(t) = R\omega\cos(\omega t) \\ \dot{z}(t) = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = -R\omega^2\cos(\omega t) \\ \ddot{y}(t) = -R\omega^2\sin(\omega t) \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

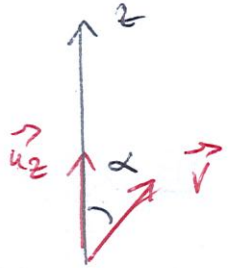
3) $\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\omega^2 + b^2}$ 1

$= cst.$

(on peut faire le calcul dans la base polaire ou dans la base cartésienne)

On calcule $\vec{V}\cdot\vec{u_z} = b$

D'après la définition du produit scalaire on a aussi $\vec{V}\cdot\vec{u_z} = \|\vec{V}\|\,\|\vec{u_z}\|\cos\alpha$



Ainsi: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{V}\cdot\vec{u_z}}{\|\vec{V}\|\,\|\vec{u_z}\|}$

$$\cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2+R^2\omega^2}} = cste$$

or $b = \dfrac{h\omega}{2\pi}$ ou $\dfrac{\omega}{b} = \dfrac{2\pi}{h}$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2\pi R}{h}\right)^2}}$$

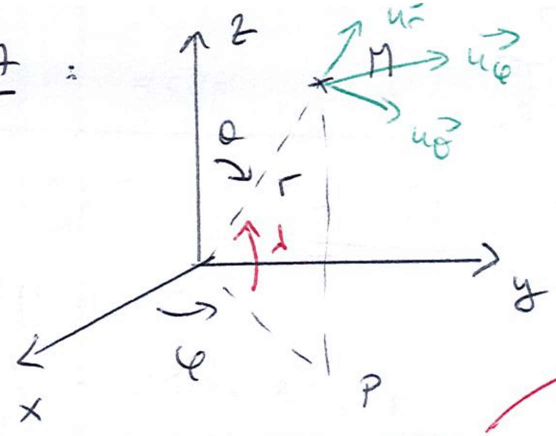
C'est une constante qui ne dépend que des dimensions de la tour (R et h).

si $h \gg R$ alors $\cos\alpha \simeq 1$ et $\vec{V}$ est selon $\vec{u_z}$.

si $h \ll R$ alors $\cos\alpha \simeq 0$ et $\vec{V}$ est selon $\vec{u_\theta}$.

Ex 7 :

1)



Lorsque λ ↗ alors θ ↘

On a $\theta = \dfrac{\pi}{2} - \lambda$ et $r = R_T + h$

les coordonnées sphériques du point M de latitude λ, de longitude φ et d'altitude h sont : $\left(R_T+h, \frac{\pi}{2}+\lambda, \varphi\right)$

2) $d\vec{OM} = \vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u_\varphi}$

et $\vec{V} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u_\varphi}$

or $\dot{r} = \dfrac{d}{dt}(R_T+h) = \dot{h}$

$\dot{\theta} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\pi}{2}-\lambda\right) = -\dot{\lambda}$

et $\sin\theta = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\lambda\right) = \cos\lambda$

$$\vec{V} = \dot{h}\,\vec{u_r} - (R_T+h)\,\dot{\lambda}\,\vec{u_\theta} + (R_T+h)\cos\lambda\,\dot{\varphi}\,\vec{u_\varphi}$$