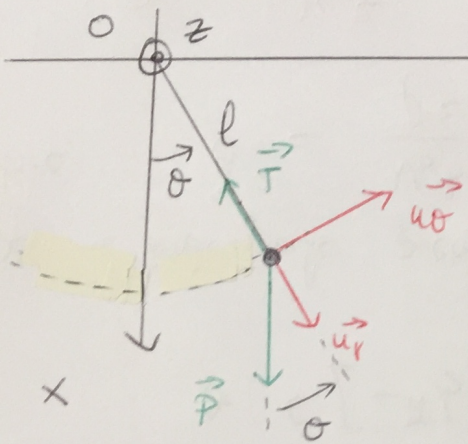


Exercice 8 Trajectoires du pendule simple



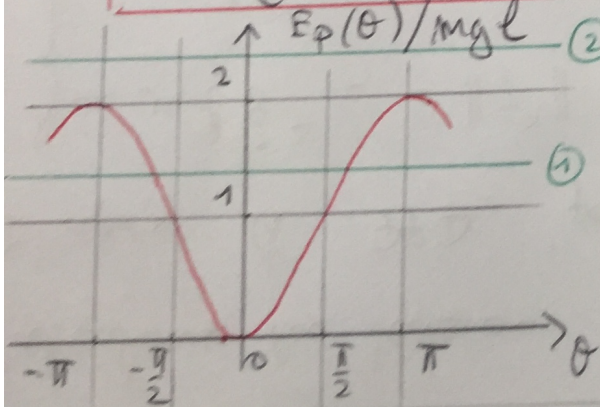
On reprend le cadre de l'étude du pendule simple. Le système est conservatif; son énergie méca. est conservée :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(\theta) = \text{cste}$$

avec $E_p(\theta) = mgl(1 - \cos\theta)$

La cste est donnée par les C.I. Prenons pour simplifier : $\theta(t=0) = 0$ et $v(t=0) = v_0$

$$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} m v_0^2$$



intégrale première du mouvement.

Pt de vue énergétique; 2 classes de trajectoires possibles:

① $E_m < 2mgl \Leftrightarrow v_0 < \sqrt{4mgl}$

oscillations autour de $\theta = 0$

② $E_m > 2mgl \Leftrightarrow v_0 > \sqrt{4mgl}$

Révolutions autour de l'axe (Oz)

⚠ Il est douteux que le fil reste tendu pour toute vitesse v_0 , lorsque $|\theta| > \pi/2$

[Cas extrême : $v_0 = \sqrt{4mgl}$, le pendule arrive au sommet $\theta = \pi$ mais sa vitesse s'annule ! le fil n'est plus tendu et la masse tombe en chute libre !]

Calculons la tension $\|\vec{T}\|$ du fil.

D'après le PFD projeté dans $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

$$\left\{ \begin{array}{l} -m\ell\ddot{\theta}^2 = -\|\vec{T}\| + mg\ell\cos\theta \quad (1) \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta \quad (2) \end{array} \right.$$

On étudie (1):

Remarque que $\|\vec{T}\| = 0 \Rightarrow mg\ell\cos\theta = -m\ell\dot{\theta}^2 < 0$

si $\|\vec{T}\|$ s'annule c'est pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

De l'intégrale première du mvt on tire

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{\ell^2} + 2\frac{g}{\ell}(\cos\theta - 1)$$

$$\Rightarrow \|\vec{T}\| = m\frac{v_0^2}{\ell} + mg(3\cos\theta - 2)$$

les révolutions sont possibles si $\|\vec{T}\|$ ne s'annule pas en $\theta = \pi$.

$$\|\vec{T}\| = \frac{mv_0^2}{\ell} - 5mg > 0, \text{ soit}$$

$$v_0 > \sqrt{5gl} //$$

Finalement : trois classes de mvt

(a) si $v_0 < \sqrt{2gl}$: oscillations d'amplitude comprises ds $[-\pi/2, \pi/2]$, aucun de $\theta = 0$. $\|\vec{T}\|$ ne s'annule jamais

(b) $\sqrt{2gl} < v_0 < \sqrt{5gl}$: au cours du mvt, la tension s'annule et le pendule tombe en chute libre

(c) $v_0 > \sqrt{5gl}$: révolutions autour de (OZ).

$\|\vec{T}\|$ ne s'annule jamais.