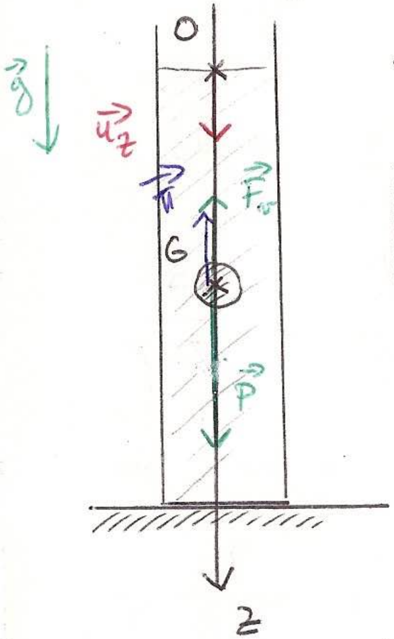
Ex 4 : Mesure d'un coeff. de frott. fluide

Le cadre de l'étude est le suivant :

Système : bille en acier de rayon R, dont on étudie le mvt du centre de gravité G. Sa masse est $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a$ et son volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Référentiel du tube supposé galiléen.

Repère cartésien $(O, \vec{u_z})$. Le mouvement est rectiligne et vertical.



$$\begin{cases} \vec{OG}(t) = z(t)\,\vec{u_z} \\ \vec{v}(t) = v_z(t)\vec{u_z} = \dot{z}(t)\,\vec{u_z} \\ \vec{a}(t) = \frac{dv_z}{dt}\vec{u_z} = \ddot{z}(t)\,\vec{u_z} \end{cases}$$

D'après la photographie on peut supposer que la bille est lâchée depuis le point O (sommet du tube) sans vitesse initiale, à l'instant $t=0$

$\Rightarrow z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = 0$.

Bilan des forces :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{u_z}$
- la force de frottements fluides $\vec{F_v} = -6\pi\eta R\vec{v} = -6\pi\eta R\, v_z(t)\vec{u_z}$
- La poussée d'Archimède $\vec{\pi} = -\rho_g V\vec{g}$

1) À partir de l'instant t_8 la bille parcourt la même distance entre chaque photographie, prises à intervalle régulier.
La vitesse de la bille est alors constante. Le régime permanent est atteint.

2) On applique le PFD au système :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_v} + \vec{\pi}$$

En projection sur $/\vec{u_z}$

$$m \frac{dv_z}{dt} = mg - 6\pi\eta R v_z - \rho_g V g$$

or $m = \rho_a V$

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{\rho_a V} v_z = g\left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_a}\right)$$

Posons $\tau = \frac{\rho_a V}{6\pi\eta R} = \frac{\rho_a \frac{4}{3}\cancel{\pi} R^3}{6\cancel{\pi}\eta R} = \frac{2}{9}\frac{\rho_a}{\eta}R^2$

alors $$\frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{\tau} = g\left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_a}\right) \quad //$$

Remarque $\rho_g < \rho_a$ donc la poussée d'Archimède ne compense pas le poids et la bille chute dans le tube.

En régime permanent : $\frac{dv_z}{dt} = 0$

$$\Rightarrow v_z = v_{lim} = g\tau\left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_a}\right) \quad //$$

La durée du régime transitoire est environ 5τ.

3) $$v_{lim} = \frac{2}{9} g \frac{R^2}{\eta}(\rho_a - \rho_g)$$

En mesurant v_{lim} sur la figure on en déduit η.

$$v_{lim} = \frac{24{,}2 \text{ cm}}{13 \times 1/50 \text{ s}} = 93 \times 10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$$

$$\eta = \frac{2 g R^2 (\rho_a - \rho_g)}{9 v_{lim}}$$

$$= \frac{2 \times 9{,}81 \times (5 \times 10^{-3})^2 \times (7{,}5 - 0{,}92) \times 10^3}{9 \times 0{,}93}$$

$$\eta = 0{,}39 \text{ kg.m}^{-1}\text{.s}^{-1} = 0{,}39 \text{ Pa.s}$$

D'après la courbe expérimentale, on trouve la valeur de la viscosité dynamique de l'huile de ricin (castor oil) à environ 30°C.