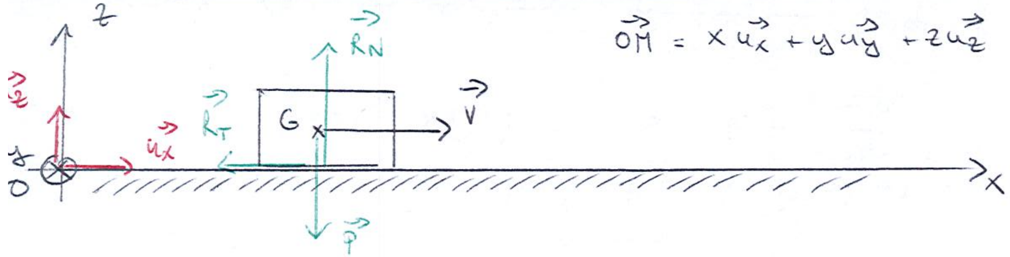
## Ex 3 Glissement sur un plan horizontal.




$\vec{OM} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z}$

On étudie un objet assimilé à un pt matériel G (son centre de gravité) dans le réf lié au support supposé galiléen. On introduit un repère cartésien $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$.

1) On suppose que l'objet glisse sans frottements. Il n'est soumis qu'à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$ et à la réaction normale du support $\vec{R_N} = R_N\vec{u_z}$ avec $R_N > 0$



En appliquant le PFD on trouve :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N} \;;$$

En projection dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg + R_N = 0 \end{cases}$$

car le solide ne décolle pas.

En utilisant les C.I :

$\vec{v}(t=0) = V_0\vec{u_x}$ et $\vec{OM}(t=0) = \vec{0}$

on trouve
$$\begin{cases} \dot{x} = V_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = V_0 t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

2) Dans le cas où les frottements sont pris en compte on rajoute la force $\vec{R_T} = -R_T\vec{u_x}$ au bilan des forces.

En supposant que l'objet glisse vers la droite ($\dot{x} > 0$), on a $R_T > 0$ car $\vec{R_T}\cdot\vec{v} < 0$

d'après la loi de Coulomb

$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{R_T}$. En projection sur les axes.

on a $m\ddot{x} = -R_T$

et $m\ddot{y} = 0 = -mg + R_N$

Soit $R_N = mg$. Toujours d'après la loi de Coulomb : $\|\vec{R_T}\| = f_c \|\vec{R_N}\|$, soit $R_T = f_c R_N$

$\Rightarrow m\ddot{x} = -f_c mg \Rightarrow \ddot{x} = -f_c g$

En intégrant les éq°s du mvt avec les m CI que précédemment :

$$\dot{x}(t) = -f_c g t + v_0$$

et $x(t) = -\frac{1}{2} f_c g t^2 + v_0 t$

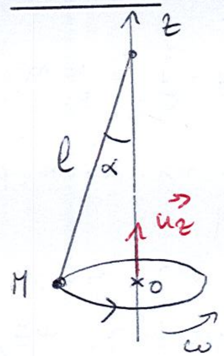
Soit $t_f$ l'instant au bout duquel l'objet s'arrête : alors $\dot{x}(t_f) = 0 \Rightarrow t_f = \frac{v_0}{f_c g}$

En notant $d_f$ la distance parcourue jusqu'à l'arrêt : $d_f = x(t_f) = v_0 t_f - \frac{1}{2} f_c g t_f^2$

$$d_f = \frac{v_0^2}{2 f_c g}$$

A.N. $d_f = \frac{4}{2 \times 0{,}2 \times 10} = 1 \text{ m}$

## Ex 6 : Pendule conique.

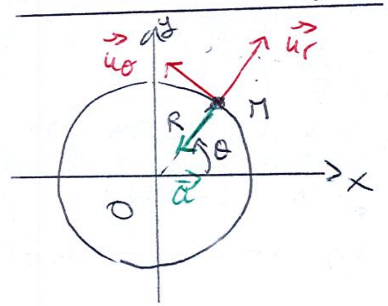



Dans cet exercice on utilise le PFD différemment.

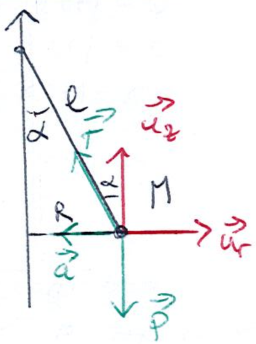
On suppose connue la trajectoire (et donc l'accélération)

On déduit du PFD à quelles conditions sur les forces et sur ω cette trajectoire peut être réalisée.

Plan de la trajectoire




Plan contenant (Oz) et le fil tendu.




La trajectoire est circulaire et uniforme dans le plan (Oxy)

$\vec{OM} = R\vec{u_r}$ ; $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$

avec $R = l \sin\alpha$

La base de projection adaptée est la base cylindrique $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$

On étudie le pt matériel M ds le réf. terrestre supposé galiléen. Les forces s'exerçant sur le système sont le poids $\vec{P} = -mg\,\vec{u_z}$ et la tension du fil $\vec{T} = -\|\vec{T}\|\sin\alpha\,\vec{u_r} + \|\vec{T}\|\cos\alpha\,\vec{u_z}$

Le PFD donne $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$.

En projection dans la base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ :

$$\begin{cases} -mR\dot\theta^2 = -\|\vec{T}\|\sin\alpha & (1) \\ mR\ddot\theta = 0 & (2) \\ 0 = -mg + \|\vec{T}\|\cos\alpha\,\vec{u_z} & (3) \end{cases}$$

(2) permet de vérifier que $\dot\theta = cste = \omega$.

de (1) et (3) on tire : $\begin{cases} \|\vec{T}\|\sin\alpha = R\dot\theta^2 m \\ \|\vec{T}\|\cos\alpha = mg \end{cases}$

$$\dot\theta^2 = \omega^2 = \frac{\|\vec{T}\|\sin\alpha}{mR} = \frac{g}{\cos\alpha}\,\frac{\sin\alpha}{R} = \frac{g}{\ell\cos\alpha}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell\cos\alpha}}$$

Rq $\alpha \in [0, \pi/2]$

$\cos\alpha > 0$

2) On a $\cos\alpha = \frac{g}{\ell}\cdot\frac{1}{\omega^2}$

or $\cos\alpha \leq 1$ par définition

donc $\omega^2 \geq g/\ell$

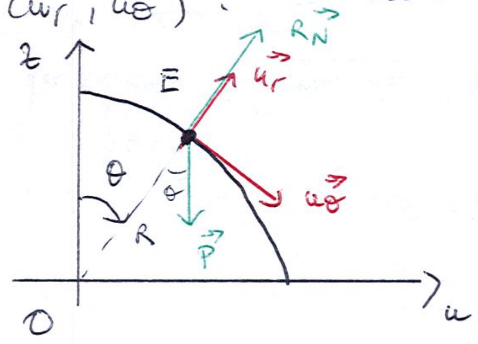
La trajectoire conique n'existe que si $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\ell}}$



Ex 5 Igloo.

On étudie le mvt de l'enfant assimilé à 1 pt matériel de masse m ds le réf. de l'igloo supposé galiléen.

Supposons que le mvt est plan pour simplifier. On introduit un syst de coord. polaires et la base mobile associée $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$.




$\vec{OM} = R\,\vec{u_r}$

$\vec{v} = R\dot\theta\,\vec{u_\theta}$

$\vec{a} = -R\dot\theta^2\,\vec{u_r} + R\ddot\theta\,\vec{u_\theta}$

Le syst. est soumis à son poids

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\cos\theta\, \vec{u_r} + mg\sin\theta\, \vec{u_\theta}$$

et à la réaction normale du support

$$\vec{R_N} = R_N\, \vec{u_r} \quad \text{avec} \quad R_N > 0 .$$

Le PFD donne $m\vec{a} = \vec{R_N} + \vec{P}$.

En projection dans la base mobile :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -mg\cos\theta + R_N \quad (1) \;/\vec{u_r} \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \quad (2) \;/\vec{u_\theta} \end{cases}$$

La 2ème éq° est l'éq° du mvt.

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta .$$

On ne sait pas l'intégrer en fonction du temps, en revanche on peut en extraire $\dot{\theta}$ en fonction de $\theta$ :

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R}\cos\theta\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R}\cos\theta = \text{cste}$$

À l'origine des temps : $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = 0$

$$\text{cste} = \frac{g}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R}\cos\theta = \frac{g}{R} \Rightarrow \underline{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}} \;/\!/$$

La vitesse <u>augmente avec</u> $\theta$. Le mvt est accéléré.

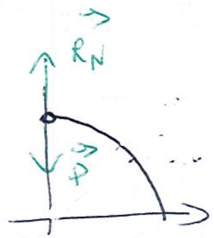
2). Dans l'éq° (1) on a :

$$R_N = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

$$= -2mg(1-\cos\theta) + mg\cos\theta$$

$$R_N = -2mg + 3mg\cos\theta$$

($\underline{Rq}$ : lorsque $\theta = 0$ on a bien $R_N = mg$ qui compense exactement le poids).




... L'enfant décolle dès que $R_N = 0$, soit :

$$0 = -2mg + 3mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \underline{\cos\theta = 2/3} \;/\!/ \quad \Rightarrow \underline{\theta = 48°} \;/\!/$$