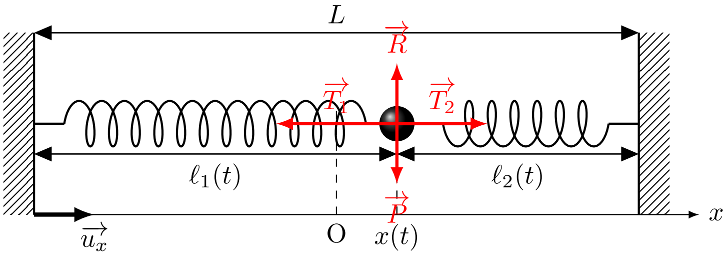
Ex. 6 Retour sur l'oscillateur à deux ressorts



1. Le schéma est reproduit ci-contre. On y lit que :

$$\boxed{\ell_1(t) = \frac{L}{2} + x(t) \quad \text{et} \quad \ell_2(t) = \frac{L}{2} - x(t)}.$$

2. On étudie le mouvement du charriot assimilé à un point M dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Ce mobile est soumis à :

- son poids $\overrightarrow{P}$ vertical dirigé vers le bas ;
- la force de liaison du rail $\overrightarrow{R}$ (réaction du support), perpendiculaire à l'axe Ox qui assure le mouvement selon cet axe ;
- la force de rappel exercée par le ressort 1 : $\overrightarrow{T_1} = -k(\ell_1(t) - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$;
- la force de rappel exercée par le ressort 2 : $\overrightarrow{T_2} = -k(\ell_2(t) - \ell_0)(-\overrightarrow{u_x})$.

3. On applique le principe fondamental de la dynamique à M dans le référentiel du rail supposé galiléen puis on le projette sur l'axe du mouvement Ox :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{P} \quad \Longrightarrow \quad m\ddot{x} = -k(\ell_1(t) - \ell_0) + k(\ell_2(t) - \ell_0)$$
$$= -k\left(\frac{L}{2} + x(t) - \ell_0\right) + k\left(\frac{L}{2} - x(t) - \ell_0\right) = -2kx(t).$$

On obtient donc l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique :

$$m\ddot{x} = -2kx, \quad \text{de la forme} \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x(t), \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}. \tag{1}$$

4. Les solutions de ces équations différentielles sont sinusoïdales de pulsation ω_0 et sont donc de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t). \tag{2}$$

On détermine les constantes d'intégration A et B à l'aide des conditions initiales $x(t = 0) = x_0 = 0$ et $\dot{x}(t = 0) = v_0$. On en déduit :

$$\begin{cases} x(t=0) & = x_0 = 0 = A \\ \dot{x}(t=0) & = v_0 = B\omega_0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad A = 0 \quad \text{et} \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}, \quad \text{puis} \quad \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}. \tag{3}$$

5. On en déduit : $\boxed{\dot{x}(t) = v_0\cos(\omega_0 t)}$.