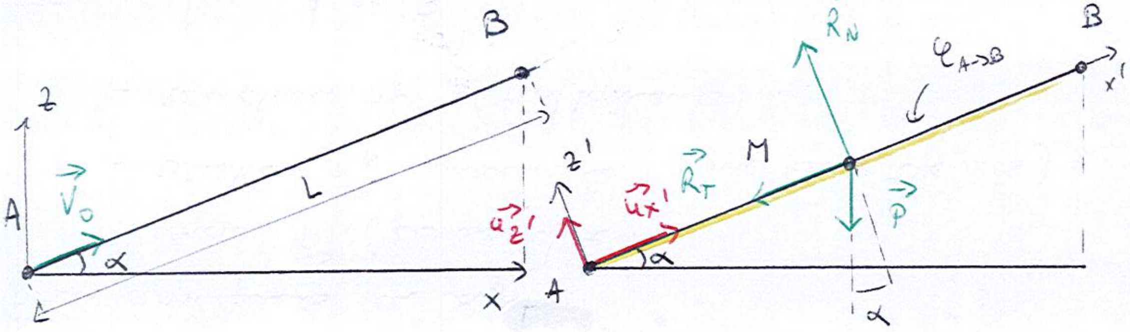
TD n° 16. Énergie.

Ex 1 : Plan incliné avec frottements.



On étudie l'objet assimilé à un pt mat. de masse m dans le réf. du plan incliné supposé galiléen. Le système est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction tangentielle $\vec{R}_T$, et à la réaction normale $\vec{R}_N$ du support. On applique le TEC entre les points A et B :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R}_T) + W_{A\to B}(\vec{R}_N)$$

$\forall t \quad \vec{R}_N \perp \vec{v} \Rightarrow W_{A\to B}(\vec{R}_N = \vec{0})$

$$W_{A\to B}(\vec{R}_T) = \int_{M\in\mathcal{C}_{A\to B}} \vec{R}_T \cdot d\vec{OM}$$

$\vec{R}_T = -\|\vec{R}_T\| \vec{u}_{x'}$ (loi de Coulomb)

et $d\vec{OM} = dx' \vec{u}_{x'}$

$\mathcal{C}_{A\to B}$: chemin parcouru de A à B.

$$W_{A\to B}(\vec{R}_T) = -\int_{x'_A}^{x_B} \|\vec{R}_T\| dx = -\|\vec{R}_T\| L.$$

D'après les lois de Coulomb pour le glissement

$$\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\|.$$

On applique le PFD au système pour trouver $\|\vec{R}_N\|$: $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$

avec $\vec{P} = -mg\sin(\alpha)\vec{u}_{x'} - mg\cos(\alpha)\vec{u}_{z'}$

$\vec{R}_T = -\|\vec{R}_T\| \vec{u}_{x'}$ et $\vec{R}_N = \|\vec{R}_N\| \vec{u}_{z'}$

En projection sur $\vec{u}_{x'}$ et $\vec{u}_{z'}$:

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = -mg\sin\alpha - \|\vec{R}_T\| \\ m\ddot{z}' = 0 = -mg\cos\alpha + \|\vec{R}_N\| \end{cases}$$

(car l'objet ne décolle pas)

$\Rightarrow \|\vec{R}_N\| = mg\cos\alpha$

et $W_{A\to B}(\vec{R}_T) = -fmgL\cos\alpha$ //

$$W_{A\to B}(\vec{P}) = \int_{M\in\mathcal{C}_{A\to B}} \vec{P}\cdot d\vec{OM} = -mg\int_{z_A}^{z_B} dz$$

$$= -mg(z_B - z_A) = -mgL\sin\alpha$$

Finalement $\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -mgL\sin\alpha - fmgL\cos\alpha$

le système atteint le pt B si $v_B \geq 0$

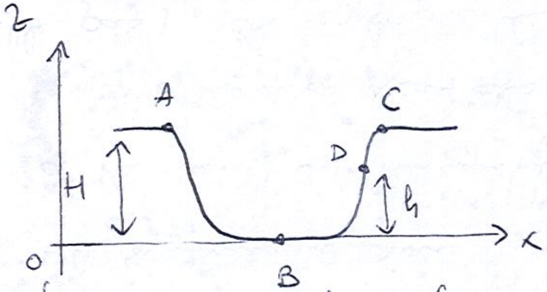
(si $v_B > 0$ il dépasse le pt B, s'arrête plus loin et redescend).

avec $V_A = V_0$ on obtient

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 \geq \cancel{m} g L \sin\alpha + f \cancel{m} g L \cos\alpha$$

$$V_0 \geq \sqrt{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)L}$$

Ex 2 : Half-pipe.



1. On étudie le mvt du surfeur ou de la surfeuse dans le réf du Half-pipe supposé galiléen.

Forces appliquées au syst :

- poids $\vec{P}$ (conservative)
- réaction $\vec{R_N}$ normale (ne travaille pas)
- réaction $\vec{R_T}$ (frottements).

TEC entre A et B :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R_T})$$

$W_{A\to B}(\vec{R_T}) \leq 0$ (force résistante)

$W_{A\to B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A) = mgH > 0$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mgH + W_{A\to B}(\vec{R_T}) \quad (v_A = 0)$$

en l'absence de frottements ...

la vitesse max est $v_B = \sqrt{2gH}$

A.N. $v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 5} = \sqrt{100} = 10\ m.s^{-1}$

2) En l'absence de frottements le mvt est conservatif : $E_m = E_c + E_p = cste$.

$E_c = \frac{1}{2} m v^2$ et $E_p = mgz$ (en choisissant l'origine de l'énergie potentielle en bas du pipe).

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mgz = cste = \frac{1}{2} m v_A^2 + mg z_A = mgH.$$

La hauteur max de l'autre côté de la rampe est atteinte lorsque $V = 0$, soit $z = H$.

3) On applique à nouveau le TEM :

$\Delta E_m = W_{A\to D}(\vec{R_T}) \Rightarrow \begin{matrix} E_{mD} = mgh \\ E_{mA} = mgH \end{matrix} \Rightarrow W_{A\to D}(\vec{R_T}) = mg(h-H) <

Ex 3

Sauter après une course d'élan consiste à convertir l'énergie cinétique en énergie potentielle de pesanteur. Cette conversion a lieu en 2 temps.

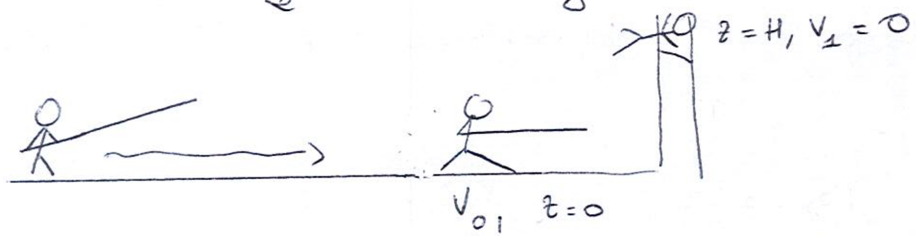
Énergie cinétique → Énergie potentielle élastique (muscle et tendons ou perche)

→ énergie potentielle de pesanteur.

La perche permet de convertir efficacement l'énergie cinétique "horizontale" en énergie élastique et de la restituer "verticalement".

En négligeant toute dissipation d'énergie

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + m g z = cste.$$



$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g H \Rightarrow H = \frac{v_0^2}{2g}$$

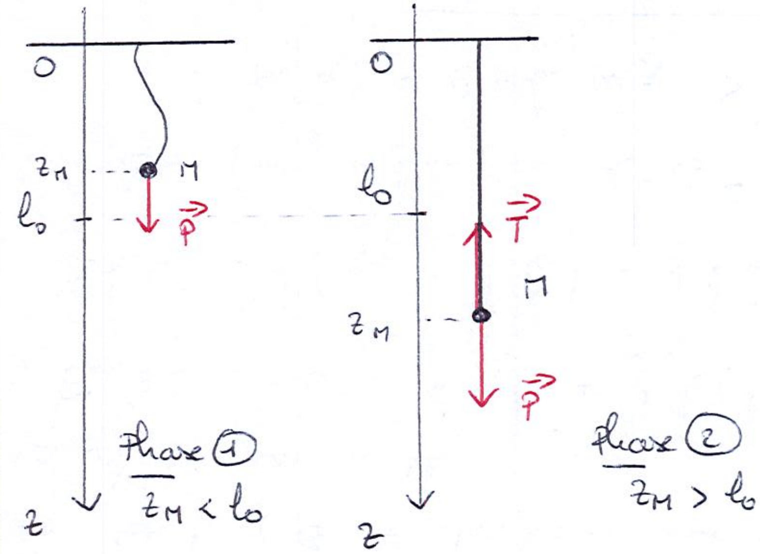
A.N. En prenant $v_0 = 10\ m.s^{-1}$ (vitesse moyenne d'un excellent coureur de 100 m)

$$H = \frac{100}{2 \times 10} = \underline{5\ m}$$

⇒ En réalité on a calculé l'élévation du centre de gravité du sauteur ⇒ ajouter 1 m

Ex 4. Saut à l'élastique

On étudie le sauteur à l'élastique dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le mvt est 1D selon l'axe (Oz) représenté sur la figure :



Le système n'est soumis qu'à des forces conservatives : le poids $\vec{P}$ (phases 1 et 2)

la tension du ressort (phase 2).

L'énergie mécanique est conservée

$$E_m = E_c + E_p = cste$$

Avec $E_c = \frac{1}{2} m v^2$

et $E_p = \begin{cases} -mgz + C_1 & \text{si } z < l_0 \\ -mgz + \frac{1}{2}k(z-l_0)^2 + C_2 & \text{si } z > l_0 \end{cases}$

Déterminons les constantes : on choisit l'origine de E_p au niveau de la plateforme de saut $(z=0)$:

$$E_p(z=0) = 0 = C_1$$

E_p est continue en $z = l_0$:

$$-mgl_0 = -mgl_0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$E_p(z) = \begin{cases} -mgz & \text{si } z < l_0 \\ -mgz + \frac{1}{2}k(z-l_0)^2 & \text{si } z > l_0 \end{cases}$$

Soit v_1 la vitesse à la fin de la chute libre. L'énergie mécanique E_m est constante et égale à sa valeur en $z=0$:

$E_m = 0$ (le sauteur saute sans vitesse initiale)

En $z = l_0$: $E_m = 0 = \frac{1}{2} m v_1^2 - mgl_0$

$$\Rightarrow \underline{v_1 = \sqrt{2gl_0}} \quad \text{A.N.} \quad \underline{v_1 = 19{,}8\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

Soit h la hauteur totale de chute.

En $z=h$: l'élastique est tendu et la vitesse est nulle.

$$E_m = 0 = 0 - mgh + \frac{1}{2}k(h-l_0)^2$$

$$\frac{1}{2}kh^2 - h(mg + kl_0) + \frac{1}{2}kl_0^2 = 0$$

$$\Delta = (mg + kl_0)^2 - k^2 l_0^2$$

$$= m^2g^2 + 2kl_0 mg > 0$$

$$h = l_0 + \frac{mg}{k} \pm \frac{\sqrt{m^2g^2 + 2kl_0mg}}{k}$$

Seule la racine $h = \frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{\Delta}}{k}$ est positive.

$$h = l_0 + \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2l_0mg}{k}} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\boxed{h = l_0 + \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{v_1^2}{\omega_0^2}}}$$

Exo : retrouver ce résultat avec le PFD.

2) Graphe de $E_p(z)$.

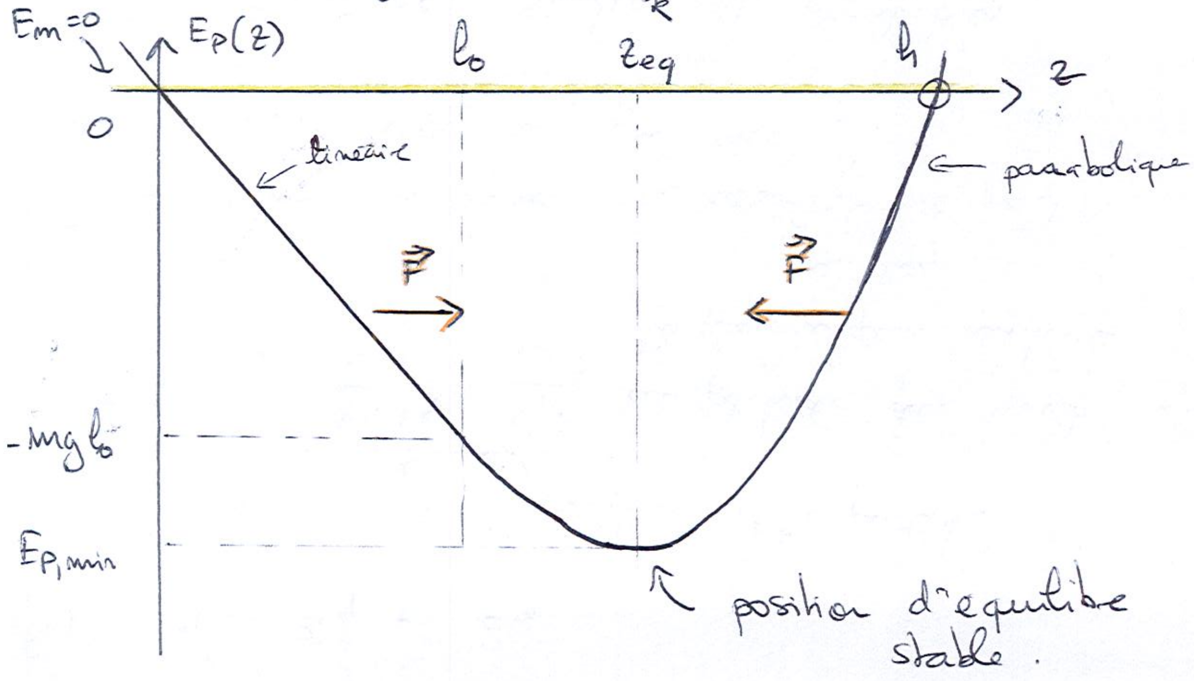
$\frac{dE_p}{dz} = 0$ dans la phase ② : $-mg + k(z - l_0) = 0$

$$\Leftrightarrow z = z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

z	0		z_{eq}		$+\infty$
E_p'		$-$	0	$+$	
E_p	0	$\searrow$	$E_{p,min}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$E_p(z_{eq}) = -mg\left(l_0 + mg/k\right) + \frac{1}{2}k\left(mg/k\right)^2$$

$$= -mgl_0 - \frac{1}{2}\frac{(mg)^2}{k} = E_{p,min} < 0$$



L'intersection de la droite horizontale $E_m = 0$ et $E_p(z)$ permet de trouver la hauteur totale de chute h.

3) Au pt le plus bas ($z = h$) le sauteur a une vitesse nulle. D'après le graphe de l'énergie potentielle la force est vers le haut ($F_z = -\frac{dE_p}{dz}$) : le sauteur remonte.

On observe aussi qu'au cours du mvt la pente de $E_p(z)$ est max en $z = h$ $\Rightarrow$ l'accélération est max en $z = h$!

En l'absence de frottements le sauteur remonte jusqu'à l'altitude $z = 0$.

En réalité, l'énergie mécanique est dissipée au cours du temps : le sauteur effectue des oscillations d'amplitude décroissante autour de la position d'équilibre ... puis finit par s'immobiliser en z_{eq} (position d'équilibre stable).

Rq : $h = z_{eq} + z_m$

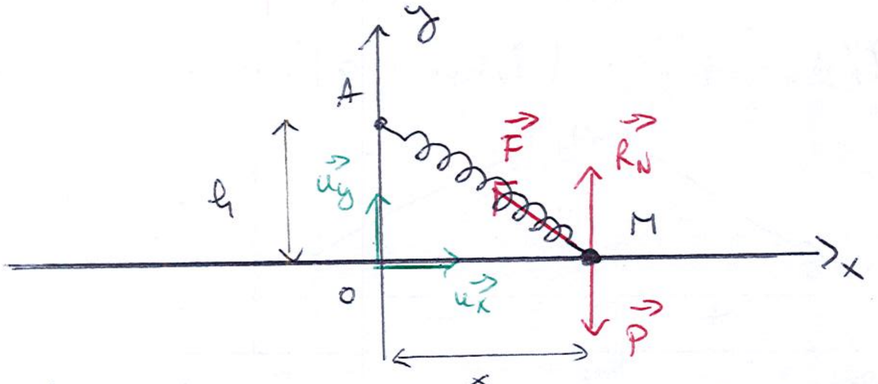
$$z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} \quad \text{position d'équilibre}$$

$$z_m = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{V_1^2}{\omega_0^2}}$$ amplitude du mvt harmonique autour de z_{eq}.

Pouvez-vous retrouver ce résultat à partir de l'eq° horaire du mvt ?

Ex 5 : Équilibres stables et instables.

1)



On étudie le pt M ds le réf de la tige horizontale supposé galiléen. Le mvt a lieu le long de l'axe (Ox).

Bilan des forces : - le poids $\vec{P}$ et la réaction normale $\vec{R_N}$ de la tige, les deux ne travaillant pas.

($\forall t$ $\vec{P} \perp \vec{v}$ et $\vec{R_N} \perp \vec{v}$ ...

car $\vec{v} = \dot{x}\,\vec{u_x}$, $\vec{P} = -mg\vec{u_y}$

et $\vec{R_N} = \|\vec{R_N}\|\,\vec{u_y}$)

- la force de rappel du ressort $\vec{F}$. (conservative)

$\Rightarrow$ le mvt est conservatif.

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + C$$

$$l = \|\vec{AM}\| = \sqrt{x^2 + h^2}$$

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+h^2} - l_0\right)^2 + C$$

Prenons $l = l_0$ comme origine des énergies potentielles $\Rightarrow$ $C = 0$.

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{x^2+h^2} - l_0\right)^2$$

(fonction de x uniquement).

Rq : pour tracer $E_p(x)$ à la calculatrice il faut adimensionner l'expression.

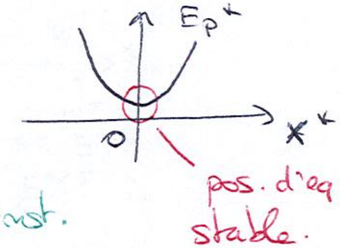
$$E_p(x) = \frac{1}{2}k\left(h\sqrt{1+\left(\frac{x}{h}\right)^2} - l_0\right)^2$$

$$\Rightarrow E_p(x) = \frac{1}{2}kh^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{x}{h}\right)^2} - \frac{l_0}{h}\right)^2$$

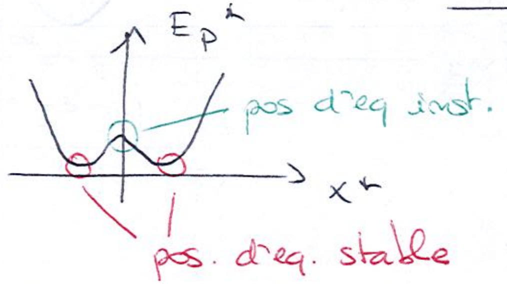
Posons $x^* = \dfrac{x}{h}$ et $E_p^* = \dfrac{E_p}{\frac{1}{2} k h^2}$, $a = \dfrac{l_0}{h}$

$$E_p^* = \left(\sqrt{1+(x^*)^2} - a\right)^2$$ avec a un paramètre $(a>0)$

À la calculatrice : $a < 1 \Rightarrow$



$a > 1 \Rightarrow$



2)

Étudions $E_p(x)$: $E_p'(x) = k \dfrac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\left(\sqrt{x^2+h^2} - l_0\right)$

$E_p'(x) = 0$ ssi $x = 0$ ou $\sqrt{x^2+h^2} - l_0 = 0$

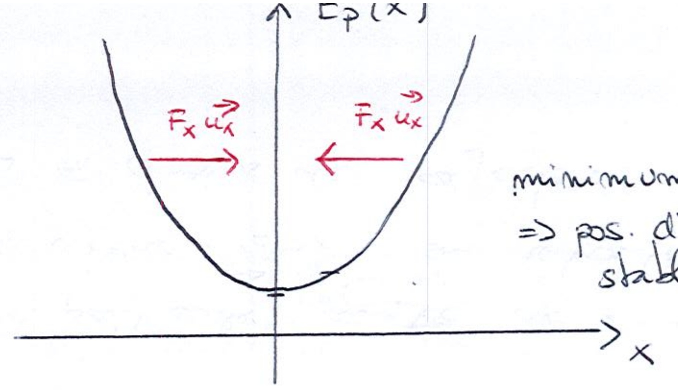
$\sqrt{x^2+h^2} - l_0 = 0 \iff x^2 = l_0^2 - h^2$

solutions $\neq 0$ ssi $l_0 > h$.

① $l_0 < h$ $\sqrt{x^2+h^2} - l_0 > 0$

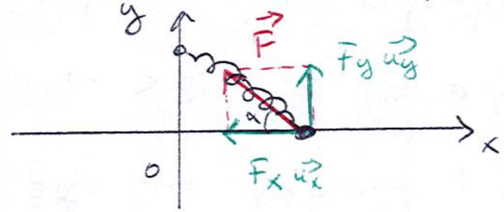
x	$-\infty$		0		$+\infty$
E_p'		$-$	0	$+$	
E_p	$+\infty$	$\searrow$	E_0	$\nearrow$	$+\infty$

$E_0 = \frac{1}{2} k (h - l_0)^2$



minimum local => pos. d'eq stable.

Rq : $F_x(x) = -\dfrac{dE_p}{dx} = -k \dfrac{x}{l}(l - l_0)$



$\vec{F} = F_x \vec{u_x} + F_y \vec{u_y}$

$F_x = - \|\vec{F}\| \cos(\alpha)$ et $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{l}$

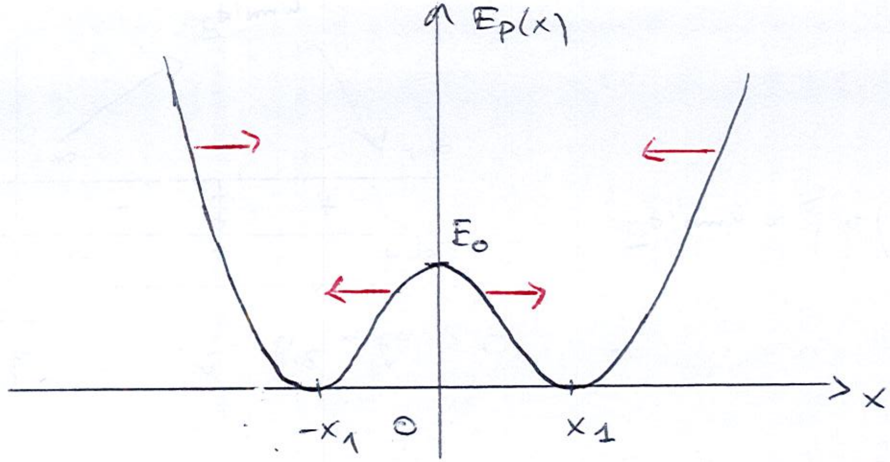
Comme $h > l_0$ le ressort est toujours allongé : la force $F_x \vec{u_x}$ est toujours une force de rappel.

② $l_0 > h$.

x	$-\infty$		$-x_1$		0		x_1		$+\infty$
		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
		$\searrow$	E_1	$\nearrow$	E_0	$\searrow$	E_1	$\nearrow$	

$x_1 = \sqrt{l_0^2 - h^2}$

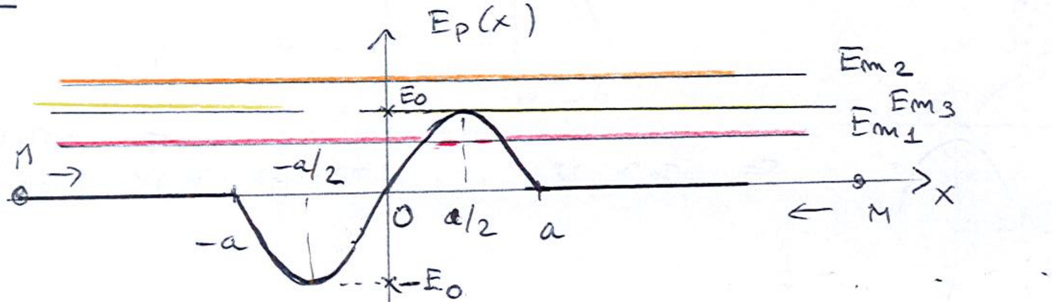
$E_0 = \frac{1}{2} k (l_0 - h)^2$ $E_1 = 0$



x_1 et $-x_1$ st des positions d'éq. stable.
(minima locaux).

$x = 0$ est une position d'eq instable
(car $l_0 > l_1$: au voisinage de $x = 0$, le ressort est comprimé)

Ex 6 : Barrière de potentiel.



Le mvt est conservatif : $E_m = cste$
$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x)$.

1) La particule arrive de $x = -\infty$ à la vitesse $v_0 \vec{u_x}$ $(\dot{x} = v_0)$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2$$

On trace la droite horizontale E_m

$\Rightarrow$ 3 trajectoires possibles :

(1) $E_m < E_0 \Rightarrow$ la particule s'arrête avant d'atteindre le sommet en $a/2$ et rebrousse chemin jusqu'à $-\infty$

(2) $E_m = E_0 \Rightarrow$ la particule s'arrête pile au sommet, en $a/2$

(3) $E_m > E_0 \Rightarrow$ la particule franchit la barrière de potentielle et poursuit son chemin vers $x = +\infty$.

2) Si la particule arrive de $x = +\infty$ avec la vitesse $-v_0 \vec{u_x}$ on retrouve les 3 m̄ classes de trajectoires.