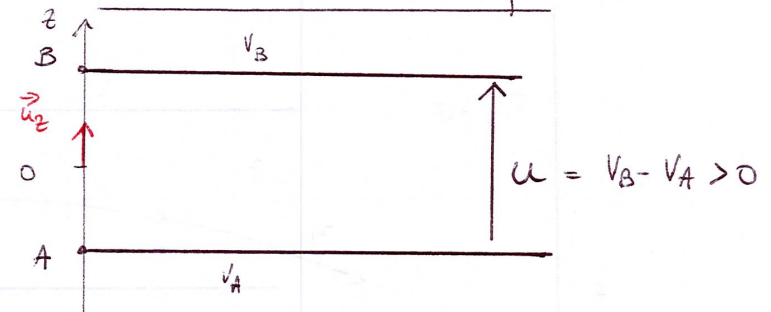


Ex 1 Détermination électrostatique

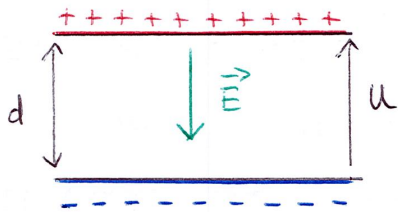
1) La tension aux bornes du condensateur (entre les armatures) est $U = V_B - V_A > 0$

Le champ électrique \vec{E} dans le condensateur est tel que $\|\vec{E}\| = \frac{|U|}{d} = \frac{U}{d}$.

Il est orienté dans le sens des potentiels électriques décroissants, c'est-à-dire de B vers A.

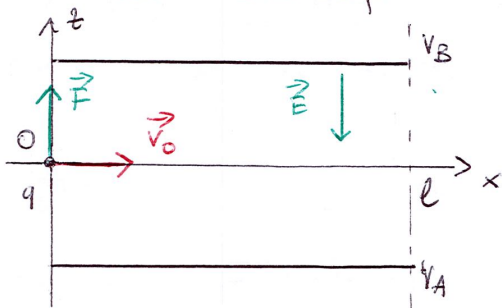
$$\text{Ainsi } \vec{E} = - \|\vec{E}\| \vec{u}_z = - \frac{U}{d} \vec{u}_z //$$

le champ électrique est orienté de la plaque chargée \oplus vers celle chargée \ominus



2) on étudie un électron (charge $q = -e$ masse m) dans le référentiel du condensateur. On

introduit un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$



Bilan des forces :

- poids $\vec{P} = m\vec{g}$

- force électrique

$$\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E}$$

(opposée à \vec{E})

On néglige le poids.

$$PFD : m\vec{a} = \vec{F} = -e\vec{E}$$

En projetant dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = \frac{eU}{md} \end{cases}$$

C.I. $\vec{OM}(t=0) = \vec{O}$

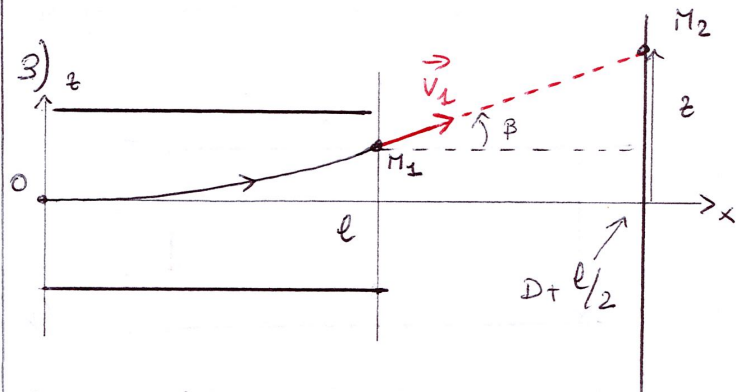
$$\vec{V}(t=0) = v_0 \vec{u}_x \quad (v_0 > 0)$$

On intègre en tenant compte des C.I.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = \frac{eU}{md} t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{eU}{2md} t^2 \end{cases}$$

$$t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow z = \frac{eU}{2mdv_0^2} x^2 //$$

Parabole tournant sa concavité dans le sens des z croissants.



À la sortie du condensateur, l'électron n'est plus soumis à aucune force (on néglige le poids): $\vec{a} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{V} = \vec{v}_1 \quad \text{avec } \vec{v}_1 \text{ la vitesse à la sortie}$$

du condensateur: le mouvement est rectiligne

uniforme.

La trajectoire est de la forme $z = ax + b$

$$a = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{(x=l)} = \|\vec{v}_1\|$$

La vitesse est continue en $x=l$. On calcule $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ en $x=l$ à l'aide de l'éq. de la trajectoire dans le condensateur.

$$z = \frac{eU}{2mdv_0^2} x^2 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{eU}{mdv_0^2} x$$

$$a = \left(\frac{dz}{dx}\right)_{(x=l)} = \frac{eU l}{mdv_0^2}$$

De plus en $x=l$ la trajectoire est continue :

$$al + b = \frac{eU}{2mdv_0^2} l^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{eU l^2}{mdv_0^2} + b = \frac{eU l^2}{2mdv_0^2} \Leftrightarrow b = -\frac{eU l^2}{2mdv_0^2}$$

$$z = \frac{eU l}{mdv_0^2} \left(x - \frac{l}{2}\right)$$

La déviation z : au pt M_2 de l'écran
($x = D + l/2$)

est donnée par :

$$z = \frac{eU l D}{mdv_0^2}$$

La déflexion est proportionnelle à la tension U à mesurer ! (2)

Remarque : on peut exprimer la déviation β du faisceau.

À la sortie du condensateur :

$$\vec{v}_1 = v_1 \cos(\beta) \vec{u}_x + v_1 \sin(\beta) \vec{u}_y, \quad v_1 = \|\vec{v}_1\|$$

$$\Rightarrow \tan(\beta) = \frac{v_{1,z}}{v_{1,x}}$$

L'e⁻ quitte le condensateur à l'instant

$$t_1 = \frac{l}{v_0}$$

$$v_{1,z} = z(t_1) = \frac{eU l}{mdv_0} \quad \text{et} \quad v_{1,x} = v_0$$

$$\tan(\beta) = \frac{eU l}{m d}$$

4) A.N. Prenons $z = 10^{-2} \text{ m}$ (= 1 cm)

$$U = \frac{z}{e l D} m d v_0^2 = \frac{10^{-2} \times 9,1 \times 10^{-31} \times 4 \times 10^{-2} \times (2,5 \times 10^8)^2}{1,6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^{-2} \times 40 \times 10^{-2}}$$

$$U = 71 \text{ V}$$

Cela ne correspond pas aux tensions usuelles
mesurées en électronique (100mV, 1V)

La tension à mesurer est d'abord amplifiée
avant d'être appliquée aux armatures du
condensateur. Le gain de l'amplificateur est
contrôlé par le bouton réglant la sensibilité
verticale de l'oscilloscope.

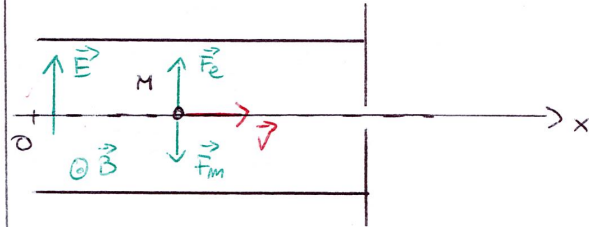
$$5) \quad \|\vec{F}\| = e \frac{U}{d} = 1,6 \times 10^{-19} \frac{71}{4 \times 10^{-2}} \approx 3 \times 10^{-16} \text{ N}$$

$$\|\vec{P}\| = m_e g = 9 \times 10^{-30} \text{ N} \ll \|\vec{F}\|.$$

$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}\|} \approx 10^{-15} \ll 1 \quad !$$

le poids est bien négligeable.

Ex 3. Sélecteur de vitesse.



Dans le réf. du condensateur, un ion V se
déplaçant à la vitesse \vec{v} est soumis :

- à la force électrique $\vec{F}_e = q\vec{E}$

- à la force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Si \vec{v} est selon l'axe (ox) alors \vec{F}_e et
 \vec{F}_m sont de sens opposés (car $q > 0$).

Elles se compensent exactement si

$$\|\vec{F}_m\| = \|\vec{F}_e\| \Leftrightarrow q\|\vec{v}\|\|\vec{B}\| = q\|\vec{E}\|$$

$$\text{soit } \|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|} \quad !$$

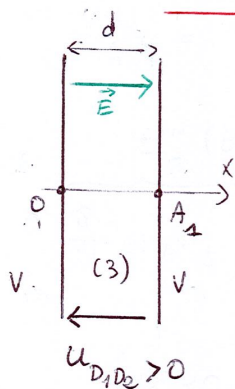
Pour toute autre vitesse les ions sont
déviés vers l'armature supérieure ou
inférieure du condensateur.

Rq: il suffit que la vitesse initiale des ions
(en 0) soit $\frac{\|\vec{E}\|}{\|\vec{B}\|}$ pour qu'ils soient sélectionnés.
Ensuite $\|\vec{v}\| = \text{cste}$.

Ex 2 Étude d'un cyclotron.

1) Dans la région (3) le mvnt est est uniformément accéléré. En appliquant le PFD à la particule de charge q et de masse m , dans le référentiel du cyclotron, et en négligeant le poids on a en effet : $m\vec{a} = q\vec{E}$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = q\vec{E}/m = \text{cste} //$$



Dans la région (3) le mvnt est conservatif et l'énergie mécanique E_m de la particule est constante.

$$E_m = \text{cste} = E_c + E_p$$

À pt O (pt d'injection) :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + q V_{D1} = q V_{D1}$$

car $v_0 = 0$

À pt A_1 : $E_m = \frac{1}{2} m v_1^2 + q V_{D2}$

Finalement : $\frac{1}{2} m v_1^2 + q V_{D2} = q V_{D1}$

soit $v_1^2 = \frac{2q(V_{D1} - V_{D2})}{m}$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2qU_{D1, D2}}{m}} //$$

(3)

2) Dans les régions (1) et (2) la particule n'est soumise qu'à la force magnétique $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ qui ne travaille pas (on néglige encore le poids).

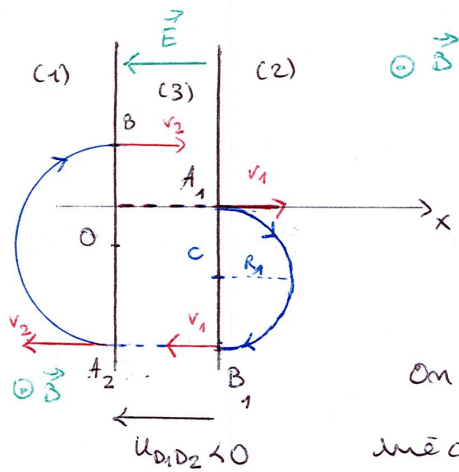
⇒ L'énergie cinétique de la particule est constante dans les régions (1) et (2) donc sa vitesse également.

3) Dans la région (2) le mvnt est uniforme et on suppose de plus que la trajectoire est circulaire. La norme de l'accélération est $\|\vec{a}\| = \frac{v_1^2}{R_1}$ avec v_1 la vitesse de la particule et R_1 le rayon de la trajectoire.

De plus $\|\vec{a}\| = \frac{1}{m} \|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| = q \|\vec{v}\| \|\vec{B}\| = q v_1 B$
car au pt d'injection \vec{v}_1 et \vec{B} sont \perp .

Ainsi $\frac{q v_1 B}{m} = \frac{v_1^2}{R_1} \Leftrightarrow R_1 = \frac{m v_1}{q B} //$

4) En sortant de la région (2) la particule a la vitesse $-v_1 \vec{e}_x$ (et l'autre)



5) Au moment où la particule sort de la région (2) au pt B_1 le champ électrique a changé car U_{D1D2} est devenue < 0

On applique le th. de l'énergie mécanique entre les pts B_1 et A_2

$$\underbrace{\frac{1}{2} m v_1^2 + q V_{D_2}}_{E_m(B_1)} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_2^2 + q V_{D_1}}_{E_m(A_2)}$$

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2q}{m} (V_{D_2} - V_{D_1}) = v_1^2 - \frac{2q}{m} U_{D_1D_2}$$

$$\underline{v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2q}{m} |U_{D_1D_2}|}} = \sqrt{\frac{4q}{m} |U_{D_1D_2}|} //$$

6) le mvt dans la région (1) est circulaire uniforme (m raisonnement que dans la région (2)). La trajectoire est un demi-cercle de rayon $R_2 = \frac{m v_2}{q B}$ parcouru à la vitesse v_2 .

La durée τ du passage dans la région (2) est $\tau = \frac{\pi R_2}{v_2} = \frac{\pi m}{q B} //$

indépendant de la vitesse. Cette durée τ est la même à chaque passage dans la région (1) ou la région (2).

B étant fixé, une mesure de τ permet d'accéder à $\frac{m}{q}$.

En négligeant le temps de passage dans la région (3) la tension U_{D1D2} doit changer de signe tous les τ . La période de U_{D1D2} est donc 2τ .

$$\underline{f_c = \frac{1}{2\tau} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{\omega_c}{2\pi} //$$

avec $\omega_c = \frac{qB}{m}$ la pulsation cyclotron.

7) Au bout du 1^{er} passage on a

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2q}{m} |U_{D1D2}|} = \sqrt{\frac{2q}{m} |U_{D1D2}|}$$

Supposons qu'au passage n on ait

$$v_n = \sqrt{\frac{2q}{m} |U_{D1D2}|}$$

d'après le théorème de l'énergie méca:

$$v_{m+1}^2 = v_m^2 + \frac{2q|U_{D_1 D_2}|}{m} = \frac{2(m+1)q|U_{D_1 D_2}|}{m}$$

$$\text{soit } v_{m+1} = \sqrt{\frac{2(m+1)q|U_{D_1 D_2}|}{m}}$$

Ainsi en raisonnant par récurrence on a :

$$\underline{v_m = \sqrt{\frac{2m}{m} q |U_{D_1 D_2}|}} \quad //$$

Le passage dans la région (3) permet d'accélérer la particule. Grâce aux régions (1) et (2) on multiplie les passages dans le m^{e} condensateur ce qui permet un gain de place considérable.

8) La soie d'en-dee m est assurée que si $R_m \leq \frac{D}{2}$ avec D le diamètre utile du cyclotron et R_m le rayon de la trajectoire après le m^{e} passage dans la région (3).

$$\text{calculons } v_m = \frac{qB}{m} R_m \quad \text{avec } R_m = D/2$$

$$\text{De plus } \frac{qB}{m} = 2\pi f_c \Rightarrow v_m = 2\pi f_c D/2 = \pi f_c D$$

$$\underline{A.N.} \quad v_m = \pi \times 12 \times 10^6 \times 52 \times 10^{-2} \quad (4)$$

$$= 1,36 \times 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

$$E_{c, \max} = \frac{1}{2} m_p v_m^2 = 0,5 \times 1,67 \times 10^{-27} \times 1,36 \times 10^7$$

$$= 3,2 \times 10^{-13} \text{ J} //$$

$$= \frac{3,2 \times 10^{-13}}{1,6 \times 10^{-19}} \text{ eV} = \underline{2 \text{ MeV.}} //$$

le champ magnétique est donné par :

$$B = \frac{mv}{q} (2\pi f_c) = \frac{1,67 \times 10^{-27}}{1,6 \times 10^{-19}} \times 2\pi \times 12 \times 10^6$$

$$\underline{B = 0,79 \text{ T}} //$$

N tours dans le cyclotron correspondent à $m=2N$ passages dans la région (3)

$$v_m = \sqrt{\frac{2m}{m} q |U_{D_1 D_2}|} = \sqrt{\frac{4N}{m} q |U_{D_1 D_2}|}$$

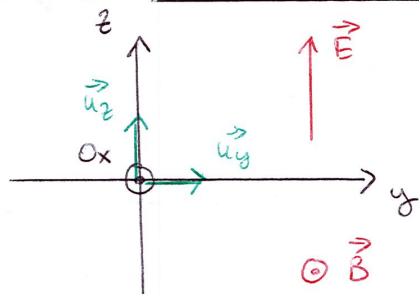
$$N = \frac{mv_m^2}{4q|U_{D_1 D_2}|} = \frac{E_{c, \max}}{2q|U_{D_1 D_2}|}$$

$$q|U_{D_1 D_2}| = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (200 \text{ kV})$$

$$= 200 \text{ keV}$$

$$N = \frac{2 \times 10^6}{0,0005} = \underline{5} //$$

Ex 4 Champ \vec{E} + champ \vec{B}



1) On se place dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen. On étudie une particule de charge q et de masse m initialement au repos au point M .

On néglige le poids de la particule qui n'est soumise qu'à la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

Initialement $\vec{v} = \vec{0}$ et $q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

Mais à l'instant $t = 0^+$ la particule est accélérée par le champ \vec{E} et $\vec{v}(t = 0^+) \neq \vec{0}$ donc la force magnétique ne sera pas nulle.

On applique le PFD: $m\vec{a} = \vec{F}$.

On projette dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

$$\vec{a} = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z$$

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & B & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ \dot{z}B \\ -\dot{y}B \end{vmatrix}$$

Finalement

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 & (1) \\ m\ddot{y} = qB\dot{z} & (2) \\ m\ddot{z} = qE - qB\dot{y} & (3) \end{cases}$$

On intègre l'éqo (3) en tenant compte des C.I. ($x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$)

$\Rightarrow x(t) = 0 \quad \forall t$: le mvmt a lieu dans le plan (Oyz)

2) On a

$$\begin{cases} \ddot{y} = \frac{qB}{m}\dot{z} \\ \ddot{z} = -\frac{qB}{m}\dot{y} + \frac{q}{m}E \end{cases}$$

Posons $u = \dot{y} + j\dot{z}$

Alors $\dot{u} = \ddot{y} + j\ddot{z}$

$$\begin{aligned} \text{et } \dot{u} &= \ddot{y} + j\ddot{z} = \frac{qB}{m}\dot{z} - j\frac{qB}{m}\dot{y} + j\frac{q}{m}E \\ &= -j\left(\frac{qB}{m}\right)(\dot{y} + j\dot{z}) + j\frac{q}{m}E \end{aligned}$$

cà d $\dot{u} = -j\frac{qB}{m}u + j\frac{q}{m}E$.

Posons $w = \dot{u}$. On doit résoudre l'éq^o du 1^{er} ordre :

$$\frac{dw}{dt} + j \frac{qB}{m} w = j \frac{q}{m} E.$$

Le fait que les coefficients soient complexes ne change rien à la résolution :

$$w(t) = A e^{-j \frac{qB}{m} t} + \frac{E}{B} \quad \text{solution générale.}$$

$$w(t=0) = \dot{y}(t=0) + j \dot{z}(t=0) = 0 \quad (\text{C.I.})$$

$$A = -\frac{E}{B} \Rightarrow w(t) = \frac{E}{B} \left(1 - e^{-j \frac{qB}{m} t} \right) //$$

$$u(t) = \int w(t) dt = \frac{E}{B} t + \frac{E}{B} \frac{m}{j q B} e^{-j \frac{qB}{m} t} + \text{cte.}$$

En utilisant les C.I. : $u(0) = y(0) + j z(0) = 0$

$$\Rightarrow \text{cte} = -\frac{E}{jB} \frac{m}{qB}$$

$$u(t) = \frac{E}{B} t + j \frac{E}{B} \frac{m}{qB} \left(1 - e^{-j \frac{qB}{m} t} \right) //$$

Rq : $\frac{E}{B}$ est bien homogène à une vitesse :

$$\left[\left\| \vec{F}_e \right\| \right] = \left[q \left\| \vec{E} \right\| \right] \quad \text{et} \quad \left[\left\| \vec{F}_m \right\| \right] = \left[q \left\| \vec{v} \right\| \left\| \vec{B} \right\| \right] \Rightarrow \left[\frac{\left\| \vec{E} \right\|}{\left\| \vec{B} \right\|} \right] = \left[\left\| \vec{v} \right\| \right].$$

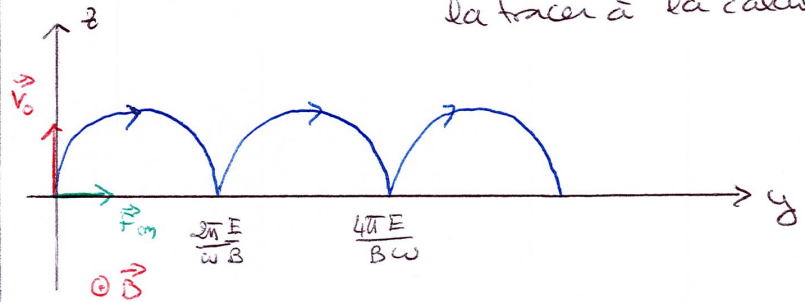
$$3) y(t) = \text{Re}(u) \quad , \quad z(t) = \text{Im}(u) \quad (5)$$

$$u(t) = \frac{E}{B} t + j \frac{E}{B} \frac{m}{qB} \left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) + j \sin\left(\frac{qB}{m} t\right) \right)$$

$$y(t) = \frac{E}{B} t - \frac{E}{B} \frac{m}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m} t\right) //$$

$$z(t) = \frac{E}{B} \frac{m}{qB} \left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) \right) //$$

la trajectoire est une cycloïde. On peut la tracer à la calculatrice



Présumons $B > 0$ et $E > 0$. Posons $\omega = \frac{qB}{m}$

$$\omega t \ll 1 \Rightarrow \dot{z}(t) = \frac{E}{B} \sin(\omega t) \approx \frac{qE}{m} t$$

$$\dot{y}(t) = \frac{E}{B} - \frac{E}{m} \cos\left(\frac{qB}{m} t\right) \approx 0$$

$$\textcircled{c} \quad z=0 \Leftrightarrow t_n = \frac{2\pi n}{\omega} \quad | n \in \mathbb{N} \Rightarrow y(t_n) = \frac{qE m E}{\omega B}$$

Ex 5 : Focalisation d'électrons.

1) Système : un électron de masse m et de charge $q = -e$.

Référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Repère cartésien $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Bilan des forces : Force électrique
 $\vec{F} = q\vec{E} = -eE\vec{u}_y$
 (avec $E > 0$).

On néglige le poids.

C.I. $x(0) = y(0) = z(0) = 0$

$$\vec{v}(0) = v_0 \cos(\alpha) \vec{u}_x + v_0 \sin(\alpha) \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \dot{x}(0) = v_0 \cos(\alpha), \dot{y}(0) = v_0 \sin(\alpha)$$

et $\dot{z}(0) = 0$

PPD : $m\vec{a} = \vec{F} = -eE\vec{u}_y$

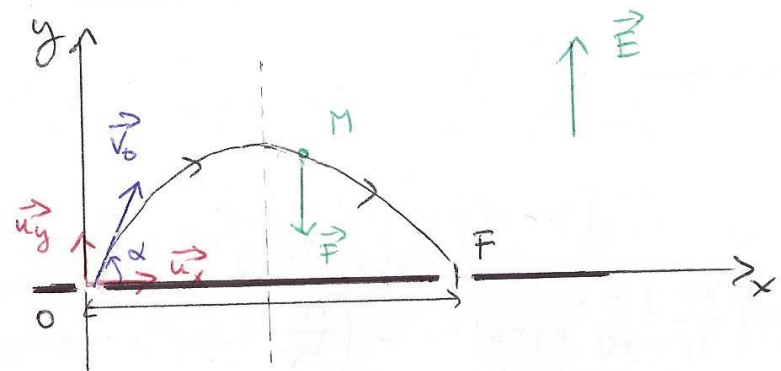
$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -e\frac{E}{m} \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{y}(t) = -\frac{eE}{m}t + v_0 \sin(\alpha) \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha)t & (1) \\ y(t) = -\frac{eE}{2m}t^2 + v_0 \sin(\alpha)t & (2) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Le mvmt est plan. La trajectoire est une portion de parabole tournant sa concavité vers le bas. En effet :

$$(1) \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

$$(2) \Rightarrow y = -\frac{eE}{2m v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x //$$



2)

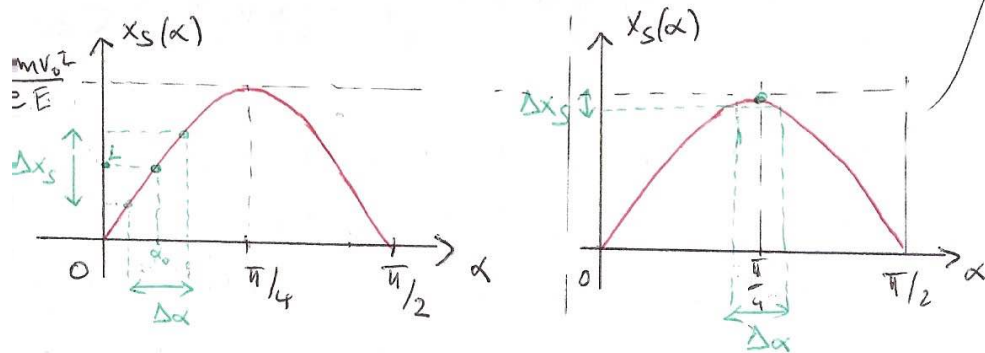
$$y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{m v_0^2}{eE} \sin(2\alpha)$$

On retient la 2ème solution :

$$x_S = \frac{m v_0^2}{eE} \sin(2\alpha) //$$

3) Pour comprendre la dispersion des e^- autour de la fente, en fonction de la dispersion angulaire $\Delta\alpha$, il convient de tracer x_s en fonction de α .



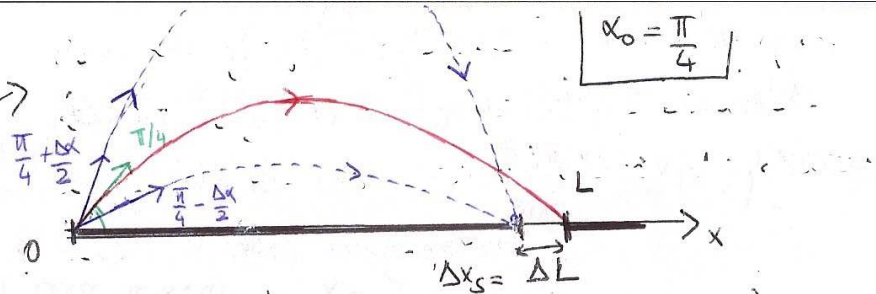
Plus la pente de $\sin(2\alpha)$ est grande en α_0 , plus la dispersion Δx_s au voisinage de la fente sera importante. Pour minimiser la dispersion on a intérêt à se placer en $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ où la pente de $\sin(2\alpha)$ est nulle.

Si la fente F est placée en $x = L$ alors

$$x_s(\alpha_0 = \frac{\pi}{4}) = L \Rightarrow \frac{mV_0^2}{eE} = L$$

$$\Rightarrow E = \frac{mV_0^2}{eL} //$$

4)



Pour $\Delta\alpha$ petit (càd $\Delta\alpha \ll \alpha_0$)

$$\text{Alors } x_s(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}) = x_s(\alpha_0) + \frac{\Delta\alpha}{2} \left(\frac{dx_s}{d\alpha} \right) (\alpha = \alpha_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{2} \right)^2 \left(\frac{d^2x_s}{d\alpha^2} \right) (\alpha = \alpha_0)$$

$= 0$ car $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$

$$x_s(\alpha_0 + \frac{\Delta\alpha}{2}) = L + \frac{(\Delta\alpha)^2}{8} \frac{mV_0^2}{eE} \left(-4 \sin(2\alpha_0) \right)$$

$$= L - \frac{mV_0^2}{2eE} (\Delta\alpha)^2 = L - \frac{L}{2} (\Delta\alpha)^2$$

On a la même expression pour $x_s(\alpha_0 - \frac{\Delta\alpha}{2})$

Si la largeur de la fente est ΔL

alors pour $\Delta L = \frac{L}{2} (\Delta\alpha)^2 \Leftrightarrow \Delta\alpha = \sqrt{\frac{2\Delta L}{L}}$, les e^-

passent presque tous par la fente

(certains ne passent pas par la fente, pour les déviations les + grandes car on a négligé les termes d'ordre $(\Delta\alpha)^3$)