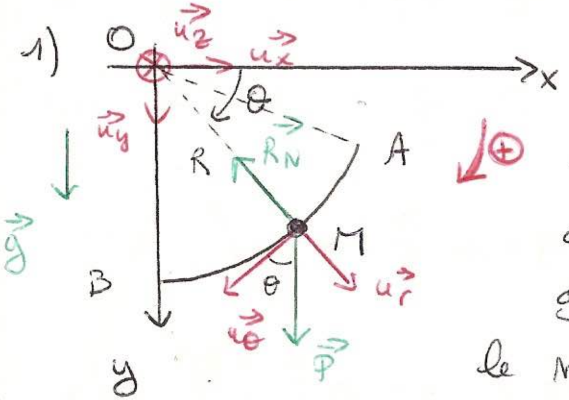
Feuille 17

[CALCUL DIRECT]

1) 

Le système étudié est l'enfant assimilé à un pt matériel M de masse m, dans le réf. terrestre supp. galiléen. On suppose le mvt plan et on introduit un syst. de coordonnées polaires et une base de projection mobile $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ complétée par le vecteur $\vec{u_z}$ pour former une base directe $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = mg\,\vec{u_y}$

$$= mg\sin\theta\,\vec{u_r} + mg\cos\theta\,\vec{u_\theta}$$

la réaction normale du toboggan :

$$\vec{R_N} = -\|\vec{R_N}\|\,\vec{u_r}$$

On néglige les frottements.

On applique le TMC :

$$\frac{d\vec{L_o}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{R_N})$$

$$\vec{L_o} = \vec{OM} \wedge (m\vec{v}) = m R\vec{u_r} \wedge (R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta})$$

$$= mR^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}$$

(Rq : si $\dot{\theta} > 0$ alors le système tourne bien ds le sens direct autour de l'axe (Oz) → Règle de la main droite).

$$\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = R\vec{u_r} \wedge (mg\sin\theta\,\vec{u_r} + mg\cos\theta\,\vec{u_\theta})$$

$$= mgR\cos\theta\,\vec{u_z}$$

$$\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{R_N}) = \vec{OM} \wedge \vec{R_N} = R\vec{u_r} \wedge (-\|\vec{R_N}\|\,\vec{u_r}) = \vec{0}$$

Finalement : $\frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\theta}\,\vec{u_z}\right) = mgR\cos\theta\,\vec{u_z}$

$$mR^2\ddot{\theta}\ \vec{u_z} = mgR\cos\theta\ \vec{u_z}$$

En projection sur $\vec{u_z}$:

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\cos\theta = 0$$

2) On multiplie par $\dot{\theta}$ et on intègre :

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\dot{\theta}\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\sin\theta\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\sin\theta = cste$$

Au pt A : $\dot{\theta} = 0$ et $\theta = \theta_0$

Finalement $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{R}\sin\theta = -\frac{g}{R}\sin\theta_0$

$$\dot{\theta} = +\sqrt{\frac{2g}{R}(\sin\theta - \sin\theta_0)}$$

et $v = R\dot{\theta} = \sqrt{2gR(\sin\theta - \sin\theta_0)}$

v est bien une fonction croissante de θ !

en B : $\theta = \pi/2$

$$v_B = \sqrt{2gR(1 - \sin\theta_0)}$$

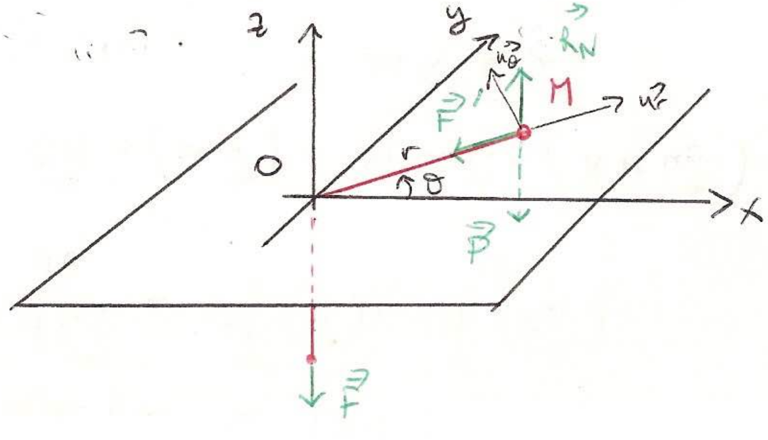
A.N. $v_B = \left(2 \times 9{,}81 \times 2{,}5\left(1 - \sin\left(\frac{10}{180}\pi\right)\right)\right)^{1/2}$

$v_B = 6{,}4\ m.s^{-1}$

Ex 2 : Conservation du moment cinétique

le système étudié est le palet de masse m assimilé à 1 pt matériel M dans le référentiel du plateau supposé galiléen.

on utilise le système de coord. ...



Bilan des forces :

- poids $\vec{P} = -mg\,\vec{u_z}$
- réaction normale $\vec{R_N} = \|\vec{R_N}\|\,\vec{u_z}$
- tension exercée . le fil $\vec{F}' = -\|\vec{F}'\|\,\vec{u_r}$

le fil étant inextensible $\|\vec{F}'\| = \|\vec{F}\|$

le mvt étant confiné au plan (Oxy), nécessairement : $\vec{P} + \vec{R_N} = \vec{0}$. La résultante des forces extérieure est égale à $\vec{F}'$!

On applique le TMC au pt O :

$$\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_0}(\vec{F}') = \vec{OM} \wedge \vec{F}' = \vec{0}$$

car $\vec{OM}$ et $\vec{F}'$ sont colinéaires à tout instant !
($\vec{F}'$ est une force centrale).

$\vec{L_0} = \vec{cste}$.

or $\vec{L_0} = \vec{OM} \wedge (m\vec{v}) = m\,r\,\vec{u_r} \wedge (\dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta})$

$$= m r^2 \dot{\theta}\,\vec{u_z} = \vec{cste} = m\,r(0)^2\dot{\theta}(0)\,\vec{u_z}$$

$\dot{\theta}(0) = \omega_0$ et $r(0) = OM(0) = a$.

Finalement : $\cancel{m}\, r^2(t)\,\dot{\theta}(t) = \cancel{m}\, a^2 \omega_0$

$$\dot{\theta} = \frac{a^2\omega_0}{r^2(t)} = \frac{a^2\omega_0}{(a-bt)^2}$$

(connaissant $r(t)$ et la constante des aires $\mathcal{C} = a^2\omega_0$ on en a déduit $\theta(t)$!)

2) On applique le PFD au système :

$$m\vec{a} = \vec{F}'$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{u_\theta}$$

$$\vec{F}' = -\|\vec{F}(t)\|\,\vec{u_r}$$

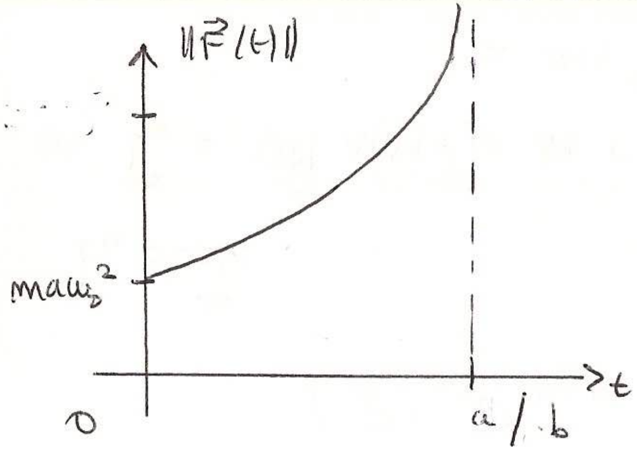
En projection sur $\vec{u_r}$:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\|\vec{F}(t)\|$$

$$\Leftrightarrow m\left(\ddot{r} - \frac{\mathcal{C}^2}{r^3}\right) = -\|\vec{F}(t)\|$$

or $r(t) = a - bt$, $\dot{r}(t) = -b$, $\ddot{r}(t) = 0$

$$\boxed{\|\vec{F}(t)\| = \frac{m\,\mathcal{C}^2}{r^3} = \frac{m\,\omega_0^2 a^4}{(a-bt)^3}}$$



$$\frac{d\|\vec{F}(t)\|}{dt} = \frac{3ba^4 m\omega_0^2}{(a-bt)^4} > 0 \quad \forall\, t < \frac{a}{b}$$

La tension du fil diverge en $t = b/a$!

Il faut tirer de plus en plus fort à mesure que la longueur du fil diminue.

(si on se plaçait dans le référentiel tournant à la vitesse $\dot{\theta}$, non-galiléen, on devrait introduire une force d'inertie centrifuge, compensant exactement $\vec{F}'$...

... vous verrez ça plus en détail en spé !)