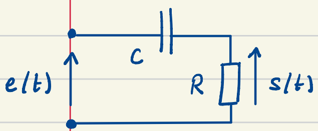
TD 9 : Filtrage linéaire



1) On se place en RSF à la pulsation ω. Les grandeurs électriques sont de la forme :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$$
$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$$

$\rightarrow$ On passe en complexe : $\underline{e}(t) = \underline{E_m}\, e^{j\omega t}$; $\underline{E_m} = E_m e^{j\varphi_e}$

$\underline{s}(t) = \underline{S_m}\, e^{j\omega t}$; $\underline{S_m} = S_m e^{j\varphi_s}$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$ d'après la formule du diviseur de tension.

$$= \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$$ On pose $\omega_0 = 1/RC$ //

$$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{j\,\omega/\omega_0}{1 + j\,\omega/\omega_0}$$ //

2) Diagramme de Bode en gain.

☞ **Méthode pour tracer le diagramme de Bode.**

— calculer le gain $G(\omega)$ et ses limites quand $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$; ✓

— calculer le gain en décibels $G_{dB}(\omega)$ et ses limites quand $\omega \to 0$ et $\omega \to \infty$; ✓

— tracer le diagramme de Bode **asymptotique** pour le gain en décibels en portant sur l'axe des abscisses la variable $x = \log(\omega/\omega_0)$; on aura auparavant déterminé les **asymptotes** de la fonction $G_{dB}(\omega)$ à basse fréquence et à haute fréquence ; ✓

— tracer **l'allure du diagramme réel** en calculant les coordonnées de points remarquables et en les plaçant sur le graphe ; ✓

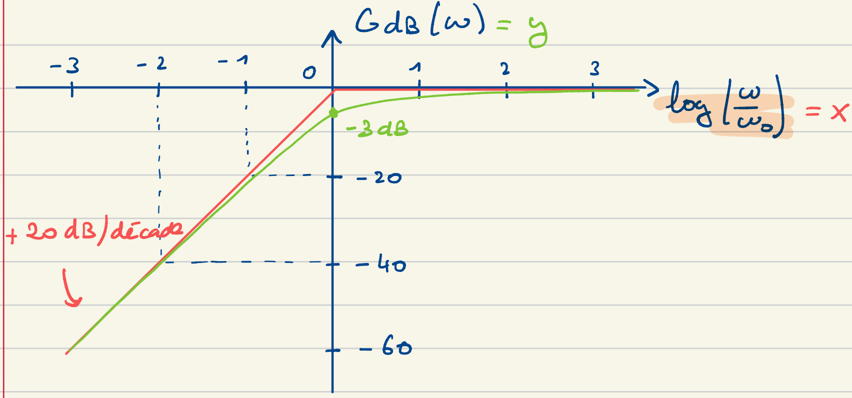
— recommencer cette procédure pour la phase $\varphi(\omega)$. ✓

⊛ $$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}$$; $\lim_{\omega \to 0} G(\omega) = 0$ //

et $\lim_{\omega \to +\infty} G(\omega) = 1.$ //

⊛ $$G_{dB}(\omega) = 20 \log G(\omega) = 20 \log\left(\frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_0)^2}}\right)$$

$\lim_{\omega \to 0} G_{dB}(\omega) = -\infty$ // et $\lim_{\omega \to +\infty} G_{dB}(\omega) = 1.$ //



⊛ On essaye de simplifier l'expression de $G_{dB}(\omega)$ à BF et à HF.

$$G_{dB}(\omega) = 20\log(\omega/\omega_0) - 10\log\left(1+(\omega/\omega_0)^2\right)$$

BF $(\omega \to 0)$: $\overbrace{G_{dB}(\omega)}^{y} \simeq 20\,\overbrace{\log(\omega/\omega_0)}^{x} - 10\underbrace{\log(1)}_{=0}$

Asymptote d'éq° $y = +20x$ (pente $+20$ dB/décade)

HF $(\omega \to +\infty)$ $\underbrace{G_{dB}(\omega)}_{} \to 1$ et $\underbrace{\log(\omega/\omega_0)}_{x} \to +\infty$

Asymptote horizontale d'éq° $y = 1$

⊛ $G_{dB}(\omega_0) = 20\log(1/\sqrt{2}) \simeq -3\,\text{dB}$

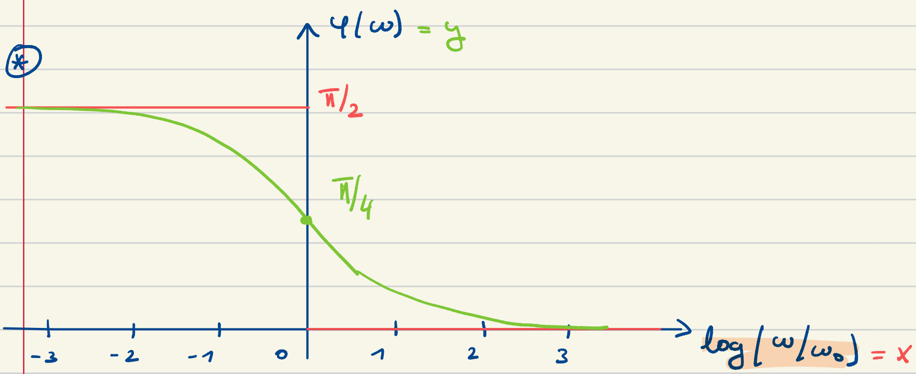
Diagramme de Bode en phase

$$(*)\ \varphi(\omega) = \operatorname{Arg} \underline{H}(j\omega) = \operatorname{Arg}\left(\frac{j\omega/\omega_0}{1+j\omega/\omega_0}\right) = \operatorname{Arg}(j\omega/\omega_0) - \operatorname{Arg}(1+j\omega/\omega_0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega/\omega_0)$$

$\lim\limits_{\omega \to 0} \varphi(\omega) = +\pi/2$ et $\lim\limits_{\omega \to +\infty} \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$

(*)



BF $(\omega \to 0)$ $\quad \underbrace{\varphi(\omega)}_{y} \to +\pi/2$ et $\underbrace{\log(\omega/\omega_0)}_{x} \to -\infty$

Asymptote horiz. d'éq° $y = +\pi/2$.

HF $(\omega \to +\infty)$ $\quad \underbrace{\varphi(\omega)}_{y} \to 0$ et $\underbrace{\log(\omega/\omega_0)}_{x} \to +\infty$

Asymptote horiz. d'éq° $y = 0$.

(*) $\varphi(\omega_0) = \pi/2 - \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$