

TD 9

Filtrage linéaire – CORRIGÉ

Ex. 2 Filtre moyennneur

- On reconnaît la fonction de transfert d'un **filtre passe-bas du 1er ordre**. On peut contrôler le comportement passe-bas sur le circuit, en remplaçant le condensateur par son **dipôle équivalent** à basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$) et à haute fréquence ($\omega \rightarrow +\infty$).

Pour justifier le comportement asymptotique, on peut partir de la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{RC}, \quad (1)$$

et la simplifier à basse fréquence et à haute fréquence.

Pour $\omega \ll \omega_0$ (basse fréquence) $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$. On en déduit pour le gain : $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \simeq 1$ et $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log G(\omega) \simeq 0$. Cela correspond à une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ à basse fréquence dans le diagramme de Bode en gain. En effet, l'échelle des fréquences est logarithmique donc le domaine des basses fréquences ($f = \omega/(2\pi) \rightarrow 0$) est renvoyé à $-\infty$ sur l'axe des abscisses. De même $\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega) \simeq 0$, ce qui correspond à asymptote horizontale d'équation $y = 0$ à basse fréquence dans le diagramme de Bode en phase.

Pour $\omega \gg \omega_0$ (haute fréquence) $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$. On en déduit pour le gain : $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| \simeq \frac{\omega_0}{\omega}$ et $G(\omega) = 20 \log G(\omega) \simeq -20 \log(\omega/\omega_0)$. Cela correspond à une asymptote d'équation $y = -20 \times x$ (pente -20 dB/décade) à haute fréquence dans le diagramme de Bode en gain. De même $\varphi(\omega) = \arg \underline{H}(j\omega) \simeq -\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à asymptote horizontale d'équation $y = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} = -90^\circ$ à haute fréquence dans le diagramme de Bode en phase.

- D'après le diagramme de Bode en gain, les signaux de fréquences supérieures ou égales à 1000 Hz subissent une atténuation d'au moins 40 dB ($G_{\text{dB}}(f) \leq -40$ dB) par rapport aux basses fréquences dont l'amplitude n'est pas modifiée ($G_{\text{dB}}(f) \simeq 0$).
- Posons $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$. D'après la fonction de transfert, $\varphi(\omega_0) = -\pi/4 \text{ rad} = -45^\circ$. On en déduit $f_0 = 10$ Hz sur le diagramme de Bode en phase. Alternativement on sait que $G_{\text{dB}}(f_0) = -3$ dB et la lecture diagramme de Bode en gain peut confirmer $f_0 = 10$ Hz. La résistance R est alors donnée par $R = \frac{1}{2\pi f_0 C}$. A.N.

$$\boxed{R = 16 \text{ k}\Omega}.$$

- Posons $u_e(t) = U_0 + U_{e1} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{e1}) + U_{e2} \cos(2\pi f_2 t + \varphi_{e2})$, avec $U_0 = 2$ V, $U_{e1} = 1$ V, $U_{e2} = 5$ V, $\varphi_{e1} = \pi/3$ rad, $\varphi_{e2} = 0$, $f_1 = 1000$ Hz et $f_2 = 2000$ Hz. Calculons l'effet du filtre sur chacune des composantes. La composante continue correspond à un signal de fréquence nulle. Comme le gain vaut 1 à fréquence nulle, la composante continue est inchangée par le filtre.

Pour la composante de fréquence f_1 on a $G_{\text{dB}}(f_1) = -40$ dB, soit $G(f_1) = 0,01$, et $\varphi(f_1) \simeq -\pi/2$ rad.

Pour la composante de fréquence f_2 on a $G_{\text{dB}}(f_2) \simeq -46$ dB, soit $G(f_2) \simeq 0,005$, et $\varphi(f_2) \simeq -\pi/2$ rad.

Ainsi, le signal de sortie est $\boxed{u_s(t) = 2 + 0,01 \cdot \cos(2\pi \cdot 1000t + \frac{\pi}{6}) + 0,025 \cdot \cos(2\pi \cdot 2000t - \frac{\pi}{2})}$, avec les mêmes unités que l'énoncé.

- Ce signal créneau a une fréquence 100 fois supérieure à la fréquence de coupure (10 Hz) du filtre. Toutes les harmoniques sont donc dans la partie coupante du filtre. D'après la question précédente, le fondamental à 1000 Hz est multiplié par 0,01, l'harmonique de rang 2 à 2000 Hz par 0,005. Les harmoniques suivantes sont de plus en plus atténuées. La partie variable du signal est donc atténuée d'un facteur supérieur à 100 par rapport à la valeur moyenne (ici 2 V). On peut considérer que le filtre se comporte comme un moyennneur. En sortie on observe un signal constant de 2 V.
- Le mode AC de l'oscilloscope coupe la valeur moyenne. La partie variable ayant été coupée par le filtre, il ne reste donc qu'une tension nulle à afficher. On observe un signal triangulaire de même fréquence que l'entrée en augmentant la sensibilité verticale car le filtre se comporte en toute rigueur comme un intégrateur pour ces fréquences.

Ex. 3 Étude d'un filtre en sortie ouverte puis en charge, calcul d'une fonction de transfert

1. À basse fréquence la bobine se comporte comme un fil, on a donc $u_s(t) \simeq 0$. À haute fréquence, elle se comporte comme un interrupteur ouvert, on a donc $u_s(t) \simeq u_e(t)$. On en déduit que le filtre est **passé-haut**.
2. La fréquence de coupure à -3 dB du filtre est $\boxed{\omega_c = \omega_0}$, sa bande passante est $[\omega_c; +\infty[$.
3. À basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$), le filtre se comporte comme un dérivateur. On peut retrouver ce résultat en exprimant la fonction de transfert (cf. Ex. 1 et cours).
4. On note Z_{\parallel} l'impédance équivalente à l'association en parallèle de L et R_u .

La fonction de transfert du filtre est $\underline{H} = \frac{Z_{\parallel}}{R + Z_{\parallel}} = \frac{1}{1 + R \underline{Y}_{\parallel}}$, avec $\underline{Y}_{\parallel} = \frac{1}{Z_{\parallel}} = \frac{1}{R_u} + \frac{1}{jL\omega}$. En développant

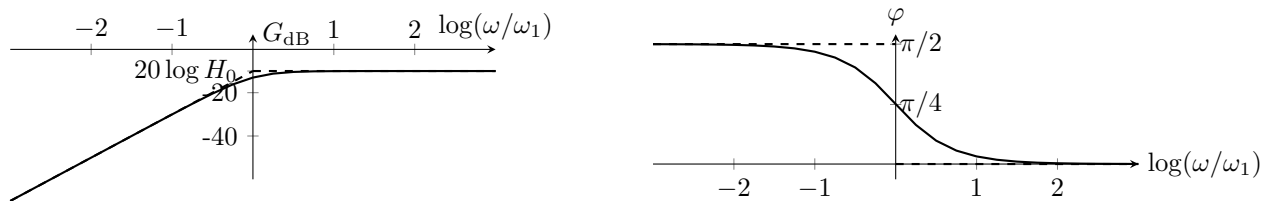
les calculs et en posant $H_0 = \frac{R_u}{R_u + R}$ et $\omega_1 = \frac{RR_u}{L(R + R_u)}$, on trouve $\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - j\frac{\omega_1}{\omega}}}$.

On retrouve la forme de la fonction de transfert de l'Ex.1, multipliée par le facteur H_0 . Sans refaire toute l'étude de l'Ex.1, on peut directement étudier le comportement asymptotique de la fonction de transfert.

En $\omega \rightarrow 0$, on a $\underline{H} \simeq \frac{j\omega}{\omega_1} H_0$, soit $G \simeq \frac{\omega}{\omega_1} H_0$, $G_{\text{dB}} \simeq 20 \log H_0 - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)$ (soit une asymptote de pente $+20\text{ dB}/\text{decade}$ et d'ordonnée à l'origine $20 \log H_0$) et $\varphi = \frac{\pi}{2}$. On peut remarquer que $H_0 < 1$, donc $20 \log H_0 < 0$.

En $\omega \rightarrow +\infty$, on a $\underline{H} \rightarrow H_0$, soit $G \rightarrow H_0$, $G_{\text{dB}} \rightarrow 20 \log H_0$ et $\varphi = 0$.

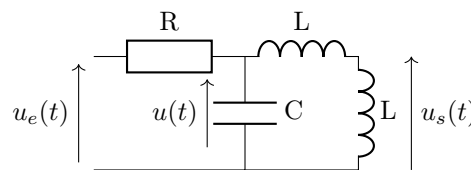
Le diagramme de Bode du filtre est donc le suivant :



5. Ce filtre est équivalent au précédent si $\boxed{R_u \gg R}$.

Ex. 4 Filtre de Hartley

1. Introduisons la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur, cette tension est aussi celle aux bornes des deux inductances en série.



Notons Z_p l'impédance de l'association en parallèle du condensateur d'une part et des deux bobines en série d'autre part.

En représentation complexe, on a : $\underline{u} = \frac{Z_p u_e}{R + Z_p} = \frac{u_e}{\frac{R}{Z_p} + 1} = \frac{u_e}{1 + R \underline{Y}_p}$, avec $\underline{Y}_p = 1/Z_p$ l'admittance de

l'ensemble condensateur et bobines en parallèle, soit $\underline{Y}_p = jC\omega + \frac{1}{2jL\omega}$.

D'autre part, la relation du diviseur de tension donne aussi $\underline{u}_s = \frac{jL\omega}{jL\omega + jL\omega} \underline{u} = \frac{1}{2} \underline{u} = \frac{u_e}{2(1 + R \underline{Y}_p)}$.

On a donc $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{2(1 + R \underline{Y}_p)} = \frac{1/2}{1 + jRC\omega + \frac{R}{2jL\omega}} = \frac{\frac{jL\omega}{R}}{\frac{2jL\omega}{R} - 2LC\omega^2 + 1}$.

En introduisant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$, on a donc : $\underline{H}(j\omega) = \frac{jL\omega/R}{2jL\omega/R - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1}$.

Or $\frac{L\omega}{R} = \frac{L\omega\omega_0}{R\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R} \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{2C}} \frac{\omega}{\omega_0}$. En posant $m = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{2C}}$, et $H_0 = \frac{1}{2}$, on a donc bien :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 2m \frac{j\omega}{\omega_0}}{1 + 2m \frac{j\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (2)$$

2. À basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$), $\underline{H}(j\omega) \simeq 2jmH_0 \frac{\omega}{\omega_0}$, alors $G(\omega) \simeq 2mH_0 \frac{\omega}{\omega_0}$ et $G_{dB}(\omega) \simeq 20 \log(2mH_0) + 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$, soit une asymptote de pente +20 dB/décade et d'ordonnée à l'origine $20 \log(2mH_0)$. On en déduit $\beta = 20 \log(2mH_0) = 20 \log(m)$.

Avec l'expression précédente de m , on trouve $\beta = 20 \log\left(\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{2C}}\right) = -43 \text{ dB}$.

À haute fréquence ($\omega \rightarrow +\infty$), $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{2jmH_0 \frac{\omega}{\omega_0}}{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = -2jmH_0 \frac{\omega_0}{\omega}$, alors $G(\omega) \simeq 2mH_0 \frac{\omega_0}{\omega}$ et $G_{dB}(\omega) \simeq 20 \log(2mH_0) - 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$, soit une asymptote de pente -20 dB/décade et d'ordonnée à l'origine $\beta = 20 \log(2mH_0)$.

De plus, en $\omega = \omega_0$, $\underline{H}(j\omega_0) = H_0$ $G(\omega_0) = H_0 = \frac{1}{2}$ et $\alpha = G_{dB}(\omega_0) = 20 \log(1/2) = -6 \text{ dB}$.

3. À basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$), $\underline{H}(j\omega) \simeq 2mH_0 \frac{j\omega}{\omega_0}$, le montage a donc un comportement dérivateur, ce que l'on peut confirmer à l'aide du diagramme de Bode (pente de +20 dB/décade en gain et phase de $+\pi/2$ rad).

À haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), $\underline{H}(j\omega) \simeq 2mH_0 \frac{\omega_0}{j\omega}$, le montage a donc un comportement intégrateur, ce que l'on peut confirmer à l'aide du diagramme de Bode (pente de -20 dB/décade en gain et phase de $-\pi/2$ rad).

4. Le signal d'entrée est la somme de deux signaux : la composante continue (de fréquence nulle) et un signal sinusoïdal de pulsation ω_0 .

Or, $G(0) = 0$, $G(\omega_0) = \frac{1}{2}$ et $\varphi(\omega_0) = 0$.

On en déduit, $s_1(t) = G(0) \times E_0 + G(\omega_0) \times E_1 \cos(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$, soit $s_1(t) = \frac{E_1}{2} \cos(\omega_0 t)$.

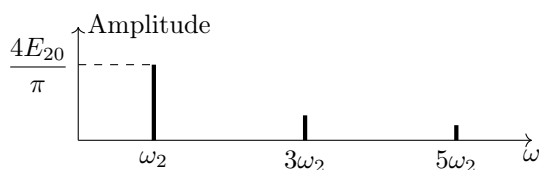
5. La pulsation ω_2 vaut $\omega_2 = \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{3\sqrt{2LC}} = \frac{\omega_0}{3}$.

Numériquement, les trois premières harmoniques ont pour pulsations :

$$\omega_2 = 23,6 \times 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}, \quad 3\omega_2 = 70,7 \times 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad 5\omega_2 = 118 \times 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Les amplitudes respectives des trois premières harmoniques sont $\frac{4E_{20}}{\pi}$, $\frac{4E_{20}}{3\pi}$ et $\frac{4E_{20}}{5\pi}$.

L'allure du spectre de $e_2(t)$ est donc :

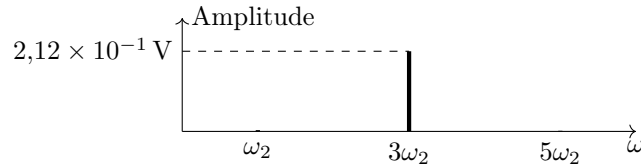


6. Pour chaque harmonique, on peut calculer numériquement l'amplitude de l'harmonique d'entrée, le gain et l'amplitude de l'harmonique de sortie. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

harmonique	Amplitude d'entrée (V)	Gain	Amplitude de sortie (V)
ω_2	1,27	$G(\omega_2) = 2.65e - 3$	3.38e-3
$3\omega_2$	0,42	$G(3\omega_2) = 0,5$	2.12e-1
$5\omega_2$	0,25	$G(5\omega_2) = 6.63e - 3$	1.69e-3

L'harmonique à $3\omega_2$ du signal de sortie est celle dont l'amplitude est la plus importante (environ 60 fois plus grande que celle de l'harmonique à ω_2 et 125 fois plus grande que celle de l'harmonique à $5\omega_2$).

Le spectre du signal de sortie est donné ci-dessous :



Le signal de sortie est presque une sinusoïde d'amplitude $3\omega_2$, d'où le nom de tripleur de fréquence.

Remarque : on pourrait placer un circuit amplificateur (à ALI par exemple) en aval du filtre pour retrouver la valeur de l'amplitude d'entrée.

Remarque : la fonction de transfert de ce filtre peut s'écrire sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{j}{2m} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)},$$

c'est à dire la forme de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande d'ordre 2 de facteur de qualité $Q = \frac{1}{2m}$ et de gain maximal H_0 pour $\omega = \omega_0$. Numériquement $Q = 71$. Le diagramme de Bode a toutes les caractéristiques du filtre passe-bande d'ordre 2 vu en cours. L'intérêt évident de ce filtre est d'obtenir un facteur de qualité très grand avec des composants usuels.