Feuille d'exercices n° 11 Signaux.

Ex 1.

Un signal $s(t)$ réalisable en pratique peut se décomposer sous la forme :

$$s(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$$

Spectrogramme d'amplitude : graphe des A_i en fonction des f_i

Spectrogramme de phase : graphe des φ_i en fonction des f_i

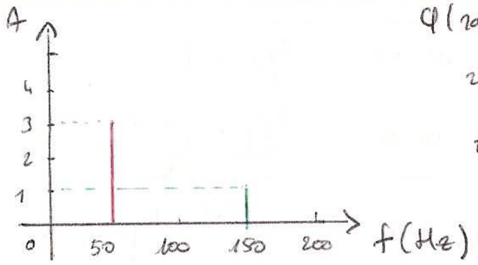
(*) $s_1(t) = 3\cos(200\pi t) + \cos(300\pi t + \pi/3)$ avec t en secondes.

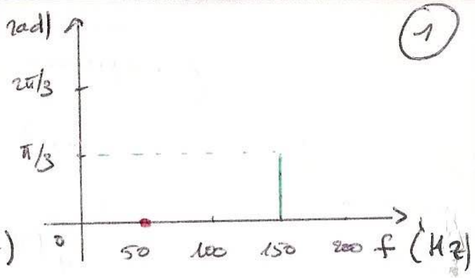
C'est un signal de la forme :

$$s_1(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$$

avec $f_1 = 100\ Hz \quad A_1 = 3 \quad \varphi_1 = 0$

$f_2 = 150\ Hz \quad A_2 = 1 \quad \varphi_2 = \pi/3$





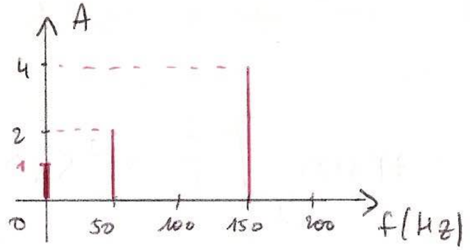
(*) $s_2(t) = 1 + 2\cos(100\pi t) + 4\sin(200\pi t)$

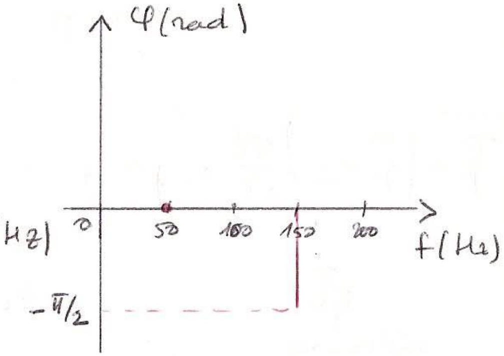
$$= A_0 + A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$$

avec $A_0 = 1$ ... (valeur moyenne, correspond à la fréquence nulle)

$f_1 = 50\ Hz, \quad A_1 = 2, \quad \varphi_1 = 0$

$f_2 = 100\ Hz, \quad A_2 = 4, \quad \varphi_2 = -\pi/2$





(Rq : $\sin(x) = \cos(x - \pi/2)$).

③ $s_3(t) = 2{,}5 \cos(200\pi t)\cos(300\pi t)$.

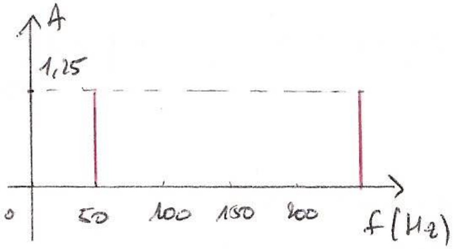
or $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$

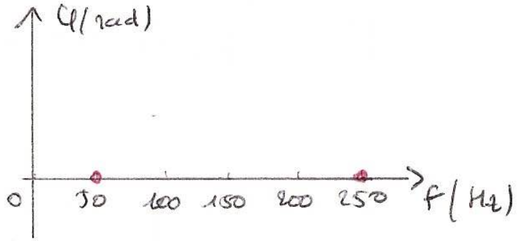
$s_3(t) = 1{,}25\cos(500\pi t) + 1{,}25\cos(100\pi t)$

$= A_1\cos(2\pi f_1 t+\varphi_1) + A_2\cos(2\pi f_2 t + \varphi_2)$

avec $f_1 = 250$ Hz $\quad A_1 = 1{,}25 \quad \varphi_1 = 0$

$f_2 = 50$ Hz $\quad A_2 = 1{,}25 \quad \varphi_2 = 0$





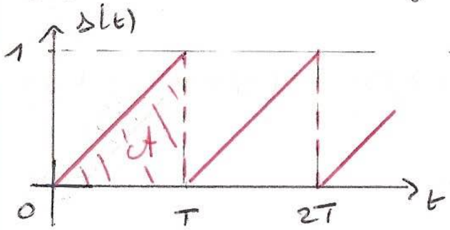
2) a) Le signal représenté est périodique, de période T. Il admet une décomposition en série de Fourier, de la forme :

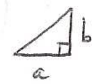
$$s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n\cos(2\pi n f_s t + \varphi_n) \quad , \quad f_s = \frac{1}{T}$$

A_0 est la valeur moyenne du signal, $\langle s\rangle_T$

D'après la formule de l'énoncé $A_0 = 1/2$.

On le confirme graphiquement :





aire du triangle rectangle : $\frac{ab}{2}$

$$\langle s\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt = +\ ct = \frac{1}{T}\left(T\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

b) Si n est pair alors :

$$\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin(2\pi n t/T) = -\frac{1}{\pi n}\sin(2\pi n t/T)$$

$$= \frac{1}{\pi n}\cos\left(2\pi n\frac{t}{T} + \pi/2\right)$$

$$= A_n\cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$$

Si n est impair alors

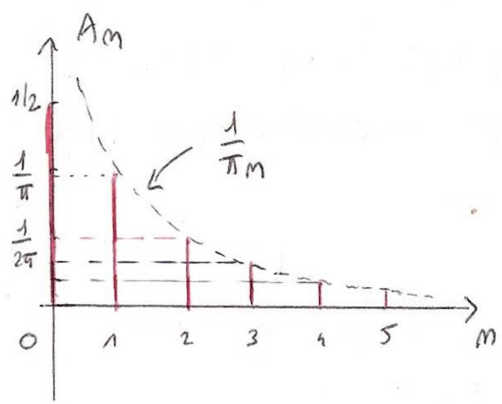
$$\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin(2\pi n t/T) = \frac{1}{\pi n}\sin(2\pi n t/T)$$

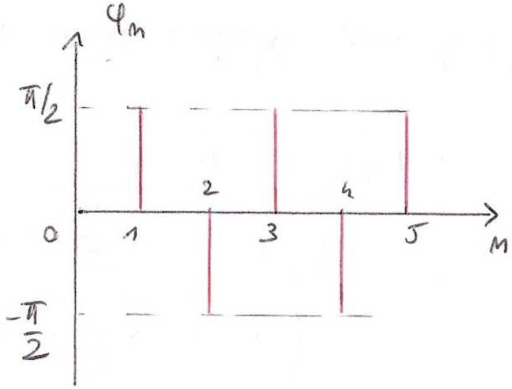
$$= \frac{1}{\pi n}\cos\left(2\pi n\frac{t}{T} - \pi/2\right)$$

$$= A_n\cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$$

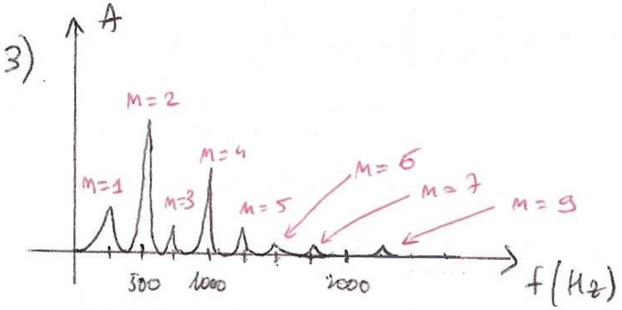
$\Rightarrow A_n = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\pi/2 & \text{si } n \text{ pair} \\ +\pi/2 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$





3)



Les fréquences du spectre sont des multiples entiers de $f_S = 250$ Hz (n=1).

Le fondamental est à 250 Hz.

4) Les harmoniques les plus prononcées sont de rangs $n = 2$ et $n = 4$.

5) Pour améliorer la résolution du spectre (diminuer la largeur des pics), il convient d'enregistrer le signal sur une durée plus longue.

Ex 2. Ondes progressives sinusoïdales.

1) L'onde $s(x,t) = S_0 \cos(20\pi t - 10\pi x + \pi)$ est de la forme :

$$s(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

avec $\omega = 20\pi$ rad$\cdot$s^{-1}

$k = 10\pi$ rad$\cdot$m^{-1}

($\varphi = \pi$ rad).

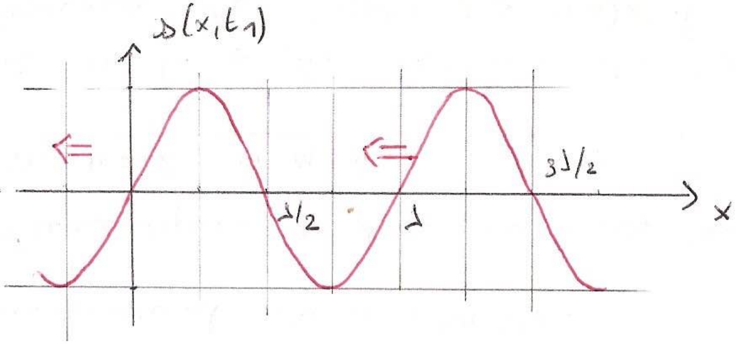
C'est une onde se propageant dans le sens des x croissants (forme $f(t - \frac{x}{c})$)

de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi} = 10$ Hz

de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 0{,}2$ m

et de célérité $c = \frac{\omega}{k} = \lambda f = 2$ m$\cdot$s^{-1}

2)



"photographie" de l'onde à l'instant t_1.

A' l'instant $t > t_1$ l'onde se sera propagée sans déformation d'une distance $c(t-t_1)$ ds le sens des x ↘. Ce qui correspond à une translation de la courbe ds le sens des x ↘

$$s(x,t) = S_1 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(x + c(t-t_1)\right)\right)$$

$$= S_1 \sin\left(\omega t + kx + \varphi\right)$$

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\omega = \frac{2\pi}{\lambda} c \ (= kc)$

et $\varphi = -\omega t_1$.

Rq : cette expression est aussi valable pour $t < t_1$.

3) on utilise la relation : $f = \frac{c}{\lambda}$

pour une onde sinusoïdale progressive :

A.N. $f = \frac{3 \times 10^8}{6,35 \times 10^{-7}} = 4,72 \times 10^{14}$ Hz

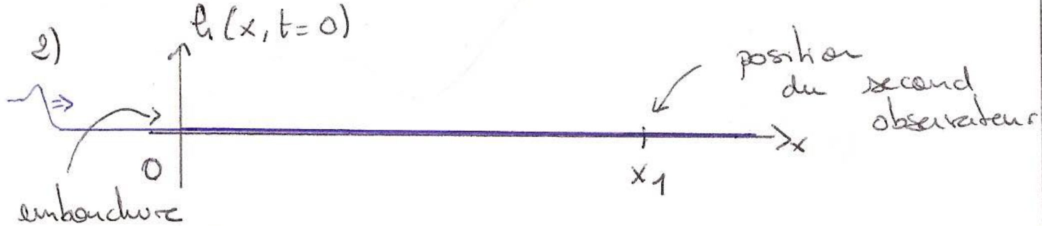
4) on utilise la relation $c = \frac{\lambda}{T}$ pour une onde sinusoïdale progressive :

A.N. $c = \frac{10}{3,0} = 3,3 \text{ m.s}^{-1}$

Ex. 3 : Propagation d'un mascaret.

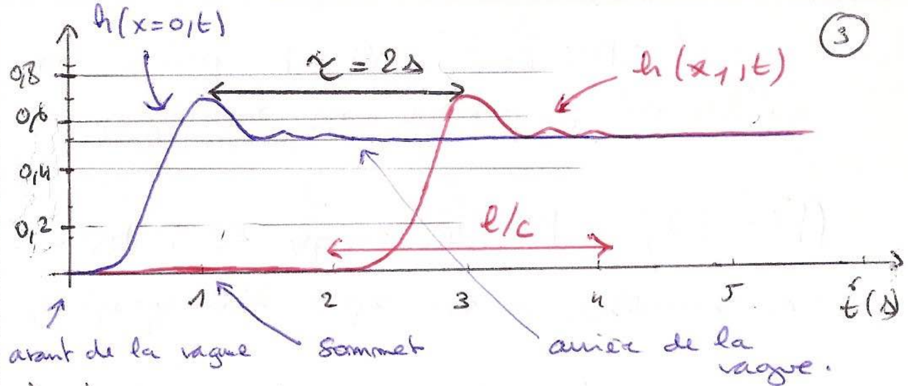
1) Le niveau final pour $t \simeq 3s$ correspond à celui de la marée haute. Il faut attendre la marée basse suivante (environ 6 h plus tard) pour que le niveau d'eau revienne à sa valeur initiale.

2)

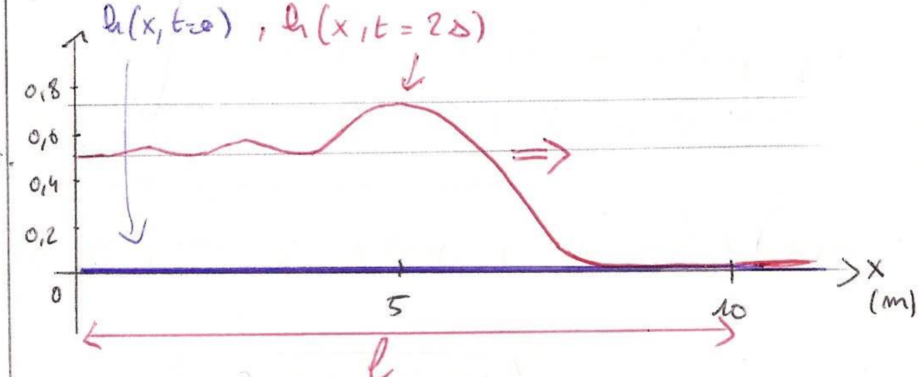


Le signal transporté par l'onde se propageant dans le fleuve est la hauteur d'eau $h(x,t)$. Il parcourt la distance x_1 en un temps $\tau = \frac{x_1}{c}$. $\underline{A.N}$ $\tau = \frac{x_1}{c} = \frac{10}{5} = 2s$.

En particulier, le maximum de la vague quittant le pt $x=0$ en $t \simeq 1s$ atteindra x_1 à $t \simeq 3s$



3) À l'instant $t=0$, la vague n'a pas passé l'embouchure : $h(x, t=0) = 0 \ \forall x \geq 0$



L'avant de la vague passe l'embouchure ($x=0$) en $t=0$. À $t_1 = 2s$ elle a parcouru la distance $d = ct_1 = 10m$. L'avant de la vague est en $x_a = 10m$. Le sommet de la vague passe l'embouchure à $t_m \simeq 1s$. À $t_1 = 2s$ il se trouve en $x_m = c(t_m - t_1) = 5m$. L'arrière de la vague passe l'embouchure en $t_r \simeq 2s \simeq t_1$.

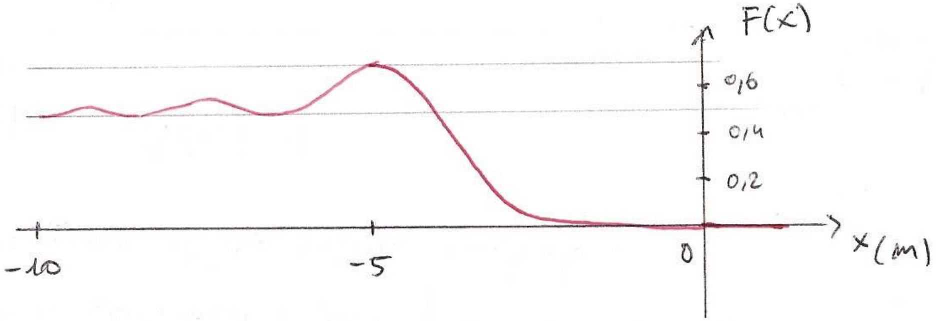
4) $h(x,t) = F(x-ct) = f\left(t-\frac{x}{c}\right)$.

En $x=0$ $\quad h(x=0,t) = f(t)$.

La fonction f est donnée dans la figure de l'énoncé !

On a tracé $h(x, t_1 = 2s)$ dans la question précédente. On a $F(x - ct_1) = h(x,t_1)$

La fonction $F(x)$ s'obtient par une translation de $ct_1 = 10\,m$ dans le sens des $x \searrow$.



ou en écrivant $F(-ct) = f(t)$, on déduit que les graphes de F et f sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et que le graphe de F est dilaté d'un facteur $c = 5$.