TD 12 Ondes stationnaires.

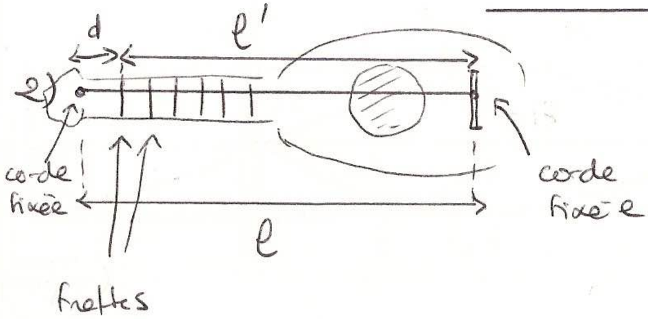
Ex 1 : Corde de guitare

1) Les ondes stationnaires ds une corde de longueur ℓ fixée à ses 2 extrémités ont des fréquences de la forme : $f_n = \frac{nc}{2\ell}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Le fondamental correspond à $n = 1$.

A.N. $c = 2\ell f_1 = 2 \times 0{,}650 \times 82{,}4 = 107 \text{ m.s}^{-1}$ //

2)



En appuyant la corde sur la frette (avec un doigt) on diminue la longueur de la corde et on augmente la fréquences

Soit $f_1' = 2^{1/12} f_1$ la nouvelle fréquence et ℓ' la nouvelle longueur de la corde

$f_1' = \frac{c}{2\ell'}$ (fondamental de la corde de longueur ℓ')

$\ell' = \frac{c}{2f_1'} = \frac{c}{2} \frac{2\ell}{c} \cdot \frac{1}{2^{1/12}} \iff \ell' = \frac{\ell}{2^{1/12}}$.

A.N. $\ell' = 61{,}4$ cm.

* La 1ère frette est à une distance $d = \ell - \ell' = 3{,}60$ cm du haut du manche.

3) La dernière frette peut être placée à une distance $d = 43{,}0$ cm du haut du manche. Cela correspond à une longueur $\ell' = \ell - d = 22$ cm.

Ce qui correspond à une fréquence fondamental

$f_1' = \frac{c}{2\ell'} = \frac{107}{2 \times 0{,}22} = 243$ Hz. //

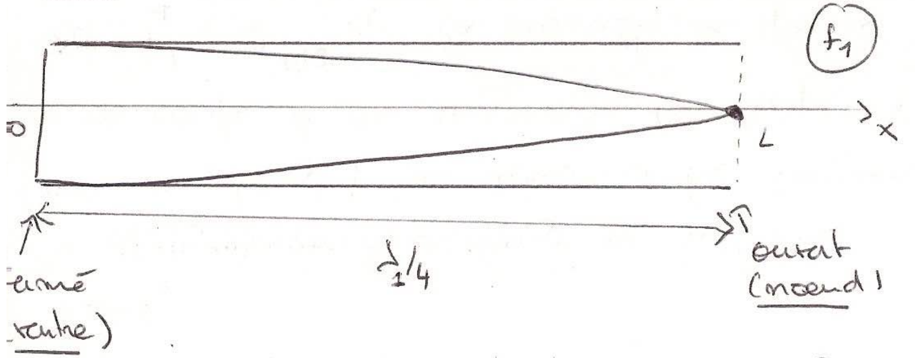
Ce résultat peut suffire. On n'attend pas ici la position de cette note dans la gamme.

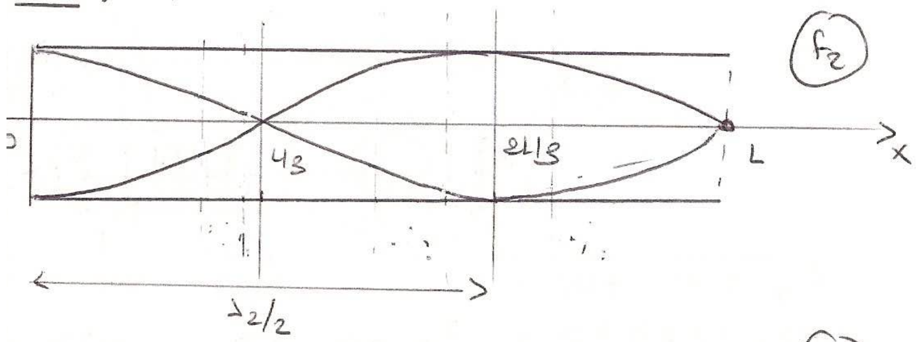
On peut chercher le nombre de demi-tons en calculant $b = \frac{f_1'}{f_1}$

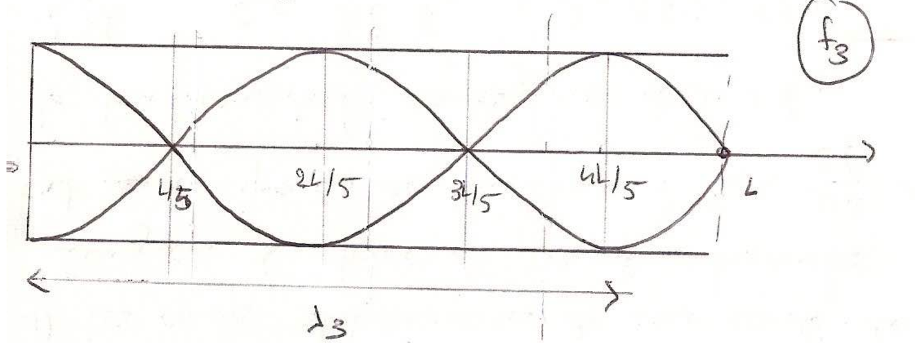
et en posant $b = 2^{p/12}$; on trouve :

$b = 2{,}96$ et $p = \frac{\ln b}{\ln 2} \times 12 = 18{,}8 \Rightarrow \boxed{18 \text{ demi-tons}}$

Ex 2 : Perce d'un instrument à vent.







Pour une onde stationnaire, quelque soit sa forme détaillée ou son origine physique :

- 2 noeuds ou 2 ventres consécutifs st séparés de $\lambda/2$
- 1 noeud et 1 ventre consécutifs st séparés de $\lambda/4$.

En se basant sur notre connaissance des modes propres de la corde on anticipe que plus la fréquence est élevée plus la longueur d'onde est courte. et plus le nombre de noeuds est grand.

(f_1) On a un ventre en $x = 0$ et un noeud en $x = L$.

Ainsi : $\lambda_1 = 4L$ $\left(L = \frac{\lambda_1}{4}\right)$

(f_2) On ajoute un noeud au fondamental

$$\frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_2}{2} = L = \frac{3\lambda_2}{4} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{4L}{3}$$

(f_3) on ajoute 2 noeuds au fondamental

$$\lambda_3/4 + \lambda_3 = L = 5\lambda_3/4 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{4L}{5}$$

Puisque $f = \frac{c}{\lambda}$

on a $f_1 = \frac{c}{\lambda_1} = \frac{c}{4L}$

$f_2 = \frac{c}{\lambda_2} = \frac{3c}{4L} = (2\times 1 - 1) f_1$

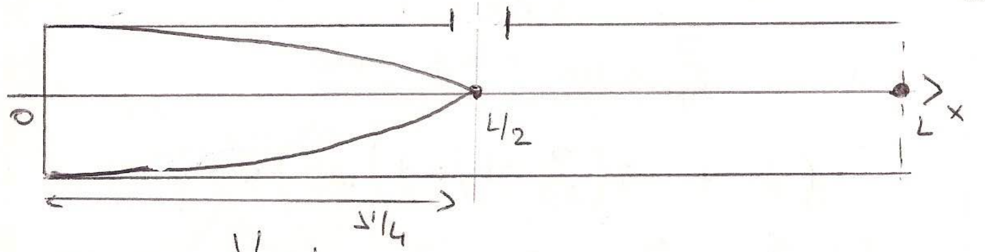
$f_3 = \frac{c}{\lambda_3} = \frac{5c}{4L} = (2\times 3 - 1) f_1$

2) on a bien $\underline{f_n = (2n-1) f_1}$

3) on cherche $f' = 2 f_1 = \frac{c}{2L}$

cela correspond à une longueur d'onde

$\lambda' = \frac{c}{f'} = 2L$ (soit un tube moitié moins long).



on a $\frac{\lambda'}{4} = \frac{L}{2}$

Il faut imposer un noeud au milieu du tube : c'est à ce pt qu'il faut percer. En bouchant le tube avec le doigt

on récupère le fondamental du tube (2)

Pour la note un demi-ton au dessus il faut multiplier la fréquence par $2^{1/12}$, càd diviser la longueur par $2^{1/12}$. On perce en $x = \frac{L}{2^{1/12}}$

Ex 3 : Réflexion corde.

... de la corde au pt M d'abscisse x est

$$y_i(x,t) = y_A\left(t - \frac{AM}{c}\right)$$

avec $AM = x$

soit $$y_i(x,t) = y_A\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

2) Soit $f(t) = y_r(L,t)$.

L'onde reflechie se propage ds le sens des x decroissants depuis le pt B.

Alors $$y_r(x,t) = f\left(t - \frac{BM}{c}\right)$$

avec $BM = \frac{L-x}{c}$

soit $$y_r(x,t) = f\left(t + \frac{x}{c} - \frac{L}{c}\right)$$

Or à chaque instant t, d'apres le principe de superposition, la hauteur de la corde est donnée par :

$$y(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t)$$

La condition au limite en $x = L$ impose $y(L,t) = 0 \ \forall t$, soit

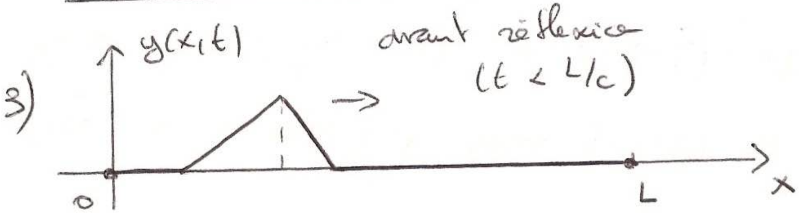
$$y_i(L,t) + y_r(L,t) = 0$$

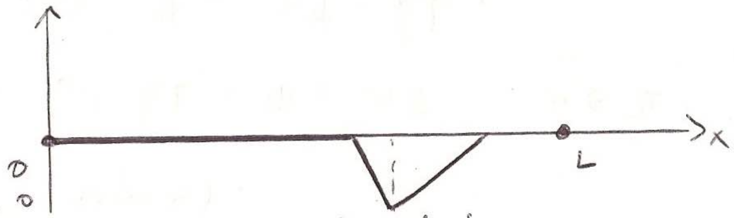
Ainsi $f(t) + y_A\left(t - \frac{L}{c}\right) = 0$

$f(t) = -y_A\left(t - \frac{L}{c}\right)$;

$$\Rightarrow y_r(x,t) = -y_A\left(t + \frac{x}{c} - \frac{2L}{c}\right)$$

3)





Rq : Pour une onde sinusoïdale $f_i(t) = A\cos\omega t$

Alors $$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx) - A\cos(\omega t + kx - 2kL)$$
$$= -2A\cos(\omega t - kL)\sin(-kx + kL)$$

c'est une onde <u>stationnaire</u>

et on a bien $y(L,t) = 0 \quad \forall t$.

<u>Ex 4 :</u> Corde de Melde.

1) On cherche des solutions de la forme

$$y(x,t) = A \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx + \psi)$$

avec $\omega = ck$.

les variables x et t, la corde vibre mais le signal ne se propage pas.

2). Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} y(0,t) = y_0 \sin(\omega t) & (1) \\ y(L,t) = 0 \quad \forall t. & (2) \end{cases}$$

De (1) on tire $y(0,t) = A \sin(\omega t + \varphi) \sin \psi$.

on en déduit $\begin{cases} A \sin \psi = y_0 \iff A = \dfrac{y_0}{\sin \psi} \\ \text{et } \varphi = 0 \end{cases}$

De (2) on tire $A \sin(\omega t) \sin(kL + \psi) = 0 \quad \forall t$.

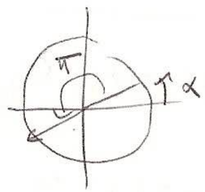
Alors $\sin(kL + \psi) = 0$

($\sin(\omega t)$ ne peut pas être tout le temps égal à 0 sauf si $\omega = 0$, ce qui correspond à la corde au repos).

On a $kL + \psi = n\pi \quad , n \in \mathbb{Z}$

soit $\psi = n\pi - kL$.

Alors $\sin(kx + \psi) = \sin(k(x-L) + n\pi)$



si n impair

$\sin(k(x-L) + n\pi) = -\sin(k(x-L))$

si n pair

$\sin(k(x-L) + n\pi) = \sin(k(x-L))$

$\sin \psi = \sin(n\pi - kL)$

$= \sin(-kL) \times (-1)^n$

soit $\sin\varphi = -\sin(kL) \times (-1)^n$

Finalement :

$$y(x,t) = \frac{y_0}{\sin\varphi}\sin(\omega t)\sin(kx+\varphi)$$

$$= \frac{y_0}{-\cancel{(-1)^n}\sin(kL)}\sin(\omega t)\,\cancel{(-1)^n}\sin(k(x-L))$$

$$y(x,t) = \frac{-y_0}{\sin(kL)}\sin(\omega t)\sin(k(x-L))$$ //

le choix de n <u>est indifférent</u>.

3) L'amplitude de la corde est

$$A = \left|\frac{y_0}{\sin(kL)}\right|$$

or lorsque $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

$A \to +\infty$.

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

On montre que l'amplitude de la corde diverge lorsque $\lambda = \frac{2L}{n}$, ce qui correspond aux modes propres de la corde de longueur L si elle était fixée à ses 2 extrémités !

4). En pratique il y a toujours de la dissipation (frottement de l'air, ou de la corde sur la poulie ...) qui empêche l'énergie de ~~se~~ s'accumuler dans la corde et l'amplitude de diverger !

5) $y_{i,0}(0,t) = y_0\sin(\omega t)$

donc $y_{i,0}(x,t) = y_0\sin(\omega t - kx)$; $k = \frac{\omega}{c}$

6) D'après le résultat de l'exercice 3 :

$$y_{r,0}(x,t) = -y_0\sin(\omega t + kx - 2kL)$$

7) Par un raisonnement analogue à celui tenu dans l'exercice 4 :

$$y_{i,1}(x,t) = y_0 \sin(\omega t - kx - 2kL).$$

[La réflexion amène un 2ème signe ⊖ qui compense celui qui vient de $y_{r,0}(x,t)$.

Tout se passe comme si :

$$y_{i,1}(x,t) = y_{i,0}\left(x, t - \frac{2L}{c}\right)$$

Le retard $\frac{2L}{c}$ correspond à l'aller-retour sur la corde de longueur L.

8) $y_{i,1}(x,t)$ est réfléchie en $x = L$ et donne naissance à ...

$$y_{r,1}(x,t) = -y_0 \sin(\omega t + kx - 4kL)$$

On peut montrer (par exemple par récurrence) que

$$y_{i,n}(x,t) = y_0 \sin(\omega t - kx - 2knL)$$

$$y_{r,n}(x,t) = y_0 \sin(\omega t + kx - 2k(n+1)L)$$

après n réflexions en $x = L$ et $x = 0$.

9) Toutes les ondes $y_{i,n}(x,t)$ pour $n = 0, 1, \dots$ sont en phase si $2kL$ est un multiple de 2π $\Rightarrow$ $2kL = 2\pi p \quad p \in \mathbb{N}^*$

(en effet $2knL$ est alors automatiquement un multiple entier de 2π).

On trouve la même condition pour les ondes réfléchies.

$$2kL = 2\pi p, \quad p \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \quad kL = p\pi, \quad p \in \mathbb{N}^*$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{2L}{p}, \quad p \in \mathbb{N}^*$$

On peut interpréter les résonances comme une interférence constructive entre toutes les ondes incidentes d'une part et toutes les ondes réfléchies d'autre part.

Ex. 6 Interférences entre 2 HP.

1) $s_1(x,t) = s_1\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$

$= A_1 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = A_1 \cos(\omega t - kx)$

avec $k = \frac{\omega}{c}$

2) $s_2(x,t) = s_2\left(D, t - \frac{S_2M}{c}\right)$

avec $S_2M = \frac{D-x}{c}$

$s_2(x,t) = A_2 \cos\left(\omega\left(t - \frac{D-x}{c}\right)\right)$

$= A_2 \cos(\omega t + kx - kD)$

(Rq : on trouve bien

$s_2(D,t) = A_2 \cos(\omega t)$)

3) La différence de marche est

$\delta(M) = S_2M - S_1M = (D-x) - x$

$= D - 2x$

4) $s(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

avec $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(k\delta)}$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(D-2x)\right)}$$

5) $I(x) = K \langle s(x,t)^2 \rangle$

$$= K \frac{1}{T}\int_0^T A_{(x)}^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\, dt$$

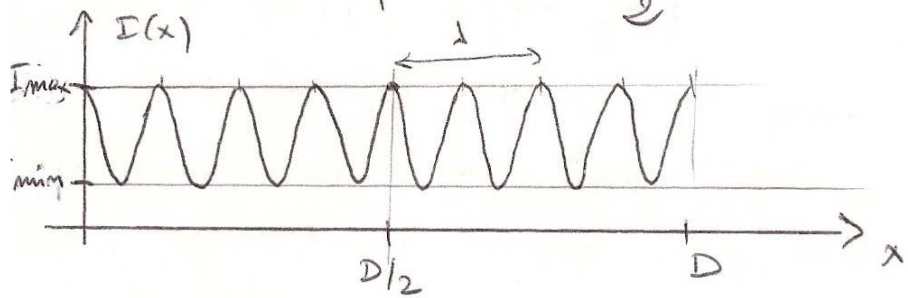
avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$ la période du signal $s(x,t)$.

$$I(x) = \frac{K}{T} A_{(x)}^2 \int_0^T \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)\right) dt$$

$$= \frac{K}{2} A^2(x) \qquad \left(Rq : \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}\right)$$

$I(x)$ oscille entre $\underset{I_{max} =}{\frac{K}{2}(A_1 + A_2)^2}$ et $\underset{I_{min} =}{\frac{K}{2}(A_1 - A_2)^2}$

avec une période $\frac{\lambda}{2}$



en $x = \frac{D}{2}$ alors $\delta(M) = 0$, les ondes sont en phases et $I(x)$ est max.

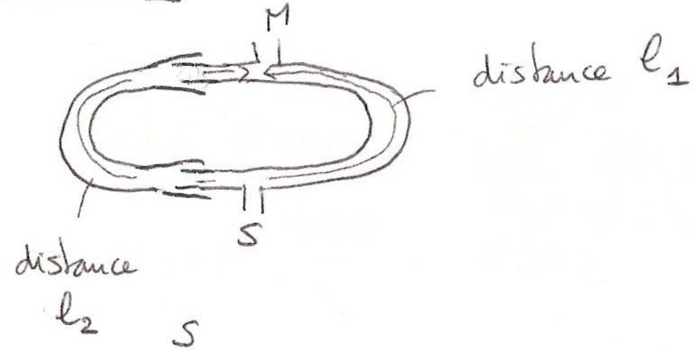
On trace un cas particulier tel que

$D = 4\lambda$

(Dans ce cas on a des interférences constructives en $x = 0$ et $x = D$)

Si $A_1 = A_2$ alors l'intensité acoustique est nulle en certains points.

Ex. 7 _ Trombone de Koenig.



La source S émet une onde qui se sépare en deux. Une des ondes parcourt une distance ℓ_1 dans le tube T_1, l'autre une distance ℓ_2 dans le tube T_2.

En utilisant le modèle de l'onde progressive 1D, le signal reçu au pt M et passé par T_1 est de la forme :

$$s_1(M,t) = f\left(t - \frac{\ell_1}{c}\right)$$

et le signal reçu au pt M et passé par T_2 est de la forme :

$$s_2(M,t) = f\left(t - \frac{\ell_2}{c}\right)$$

avec $f(t) = A\cos(2\pi f t)$.

Le signal résultant en M est $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$

Lorsque $\delta(M) = \ell_2 - \ell_1 = n\lambda$, $n \in \mathbb{Z}$

alors <u>les signaux st en phase et</u> <u>$s(t)$ est maximum.</u>

2) Pour passer d'un max à un autre il faut augmenter la diff. de marche de λ,

soit $\lambda = 2d = 8,6$ cm.

or $c = \lambda f$

et $u_r(c) = \sqrt{u_r(\lambda)^2 + u_r(f)^2}$

avec $u_r(\lambda) = u_r(d) = \dfrac{2u(d)}{2d} = \dfrac{2}{86}$

$= 0,024.$

et $u_r(f) = \dfrac{1}{2000} = 0,005$

$u_r(c) = 0,024$. (Rq : $u_r(f) \ll u_r(\lambda)$ soit $u_r(c) \simeq u_r(\lambda)$)

$u(c) = u_r(c) \times (\lambda f) = 0,024 \times 344$
$= 8,3$ m.s^{-1}

Ainsi <u>$c = 344 \pm 8$ m.s^{-1} à 68%</u>

Ex. 8 Contrôle actif du bruit

1) Il faut que le signal à envoyer au HP soit prêt lorsque le bruit y arrive.

Entre le micro et le HP le bruit se propage en un temps $\tau = \frac{L}{c}$

A.N. $\tau = \frac{2}{344} = 6\ ms$.

Le signal capté par le micro est

$s_{bruit}(t) = A \cos(\omega t)$.

Le signal en arrivant au niveau du HP est en fait de la forme

$s_{bruit}\left(t - \frac{L}{c}\right)$

Le haut-parleur doit émettre un signal

$s_{HP}(t) = - s_{bruit}\left(t - \frac{L}{c}\right)$

Le signal résultant est

$s(t) = s_{HP}(t) + s_{bruit}\left(t - \frac{L}{c}\right) = 0$

4. Le signal reçu au niveau du micro n'est plus simplement $s_{bruit}(t)$.

En pratique il faut asservir le HP pour assurer un signal nul (ou le plus faible possible) en aval du HP