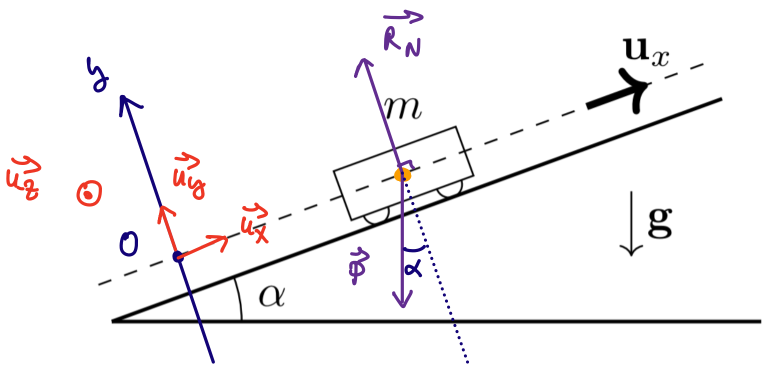
Ex. 8

1)



Système : chariot assimilé à un point matériel M de masse m.

Réf. du plan incliné, supposé galiléen.

Repère : cartésien $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$

Bilan des forces : poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\sin\alpha\,\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y}$

réaction normale du support : $\vec{R_N} = +\|\vec{R_N}\|\,\vec{u_y}$

PFD : $m\vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{R_N}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}(t) = -mg\sin(\alpha) & (1) \\ m\ddot{y}(t) = -mg\cos(\alpha) + \|\vec{R_N}\| & (2) \\ m\ddot{z}(t) = 0 & (3) \end{cases}$$

Le chariot ne décolle pas donc $\forall t$: $y(t) = 0 \Rightarrow \dot{y}(t) = 0 \Rightarrow \ddot{y}(t) = 0$

donc $\|\vec{R_N}\| = mg\cos(\alpha)$ //

On intègre (1) et (3) en tenant compte des C.I.

$x(t=0) = 0$; $\dot{x}(t=0) = V_0 > 0$; $z(t=0) = 0$ et $\dot{z}(t=0) = 0$

Finalement : $\forall t$: $z(t) = 0$

et $\dot{x}(t) = -g\sin(\alpha)t + V_0$ // ; $x(t) = -\frac{1}{2}g\sin(\alpha)t^2 + V_0 t$ //

La vitesse $\dot{x}(t)$ diminue et s'annule à l'instant t_1 tq

$$\dot{x}(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{V_0}{g\sin(\alpha)}$$

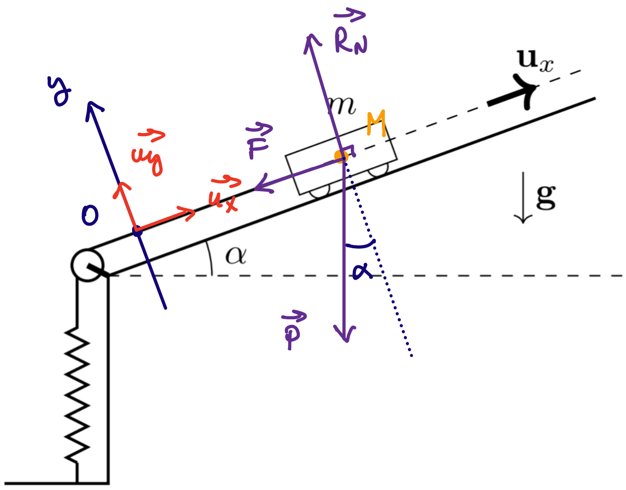
À l'instant t_1 on impose $x(t_1) = a$ soit :

$$-\frac{1}{2} g \sin(\alpha) \frac{V_0^2}{g^2 \sin^2(\alpha)} + V_0 \frac{V_0}{g \sin(\alpha)} = a$$

$$\Rightarrow \frac{V_0^2}{2 g \sin(\alpha)} = a \Rightarrow \underline{V_0 = \sqrt{2 g \sin(\alpha) a}}$$

Rq : on peut retrouver ce résultat en appliquant grâce au théorème de l'énergie mécanique (cf. Chap 15).

2)



Le cadre de l'étude est le même. On ajoute la force de rappel : $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u_x}$.

D'après l'énoncé : $\ell = \ell_0 + x(t) \Rightarrow \underline{\vec{F} = -k\, x(t)\, \vec{u_x}}$

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F}$.

En projection sur $\vec{u_x}$: $m\ddot{x}(t) = -mg\sin(\alpha) - k\,x(t)$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m} x(t) = -g\sin(\alpha)$$

On reconnait l'éq. diff. de l'OH. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsato propre.

Solution générale : $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) - \frac{mg}{k}\sin(\alpha)$

À l'aide des C.I. $\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = V_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{mg}{k}\sin(\alpha) \\ B = \frac{V_1}{\omega_0} \end{cases}$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{mg}{k}\sin(\alpha)\cos(\omega_0 t) + \frac{V_1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) - \frac{mg}{k}\sin(\alpha)$$

On souhaite qu'à l'instant t_1 où la vitesse s'annule le mobile ait parcouru la distance $x(t_1) = a$.

On peut, comme dans l'exo 7, résoudre $\dot{x}(t_1) = 0$ pour déterminer t_1 puis réinjecter dans $x(t_1)$.

Plus simplement, comme $x(t)$ est une fonction sinusoïdale, la vitesse $\dot{x}(t)$ s'annule lorsque $x(t)$ est maximale.

Or $x(t)$ est de la forme $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{mg}{k}\sin(\alpha)$

$$\text{avec} \quad X_m = \sqrt{\frac{v_1^2}{\omega_0^2} + \left(\frac{mg}{k}\sin(\alpha)\right)^2}$$

La valeur max. de $x(t)$ est $X_m - \frac{mg}{k}\sin(\alpha)$

On résout $X_m - \frac{mg}{k}\sin(\alpha) = a$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_1^2}{\omega_0^2} = \left(a + \frac{mg}{k}\sin(\alpha)\right)^2 - \left(\frac{mg}{k}\sin(\alpha)\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad = a^2 + \frac{2mg}{k}\sin(\alpha)\, a$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}a^2 + 2g\sin(\alpha)\, a}$$

Lorsque $k \to 0$ on retrouve le résultat de la 1ère question