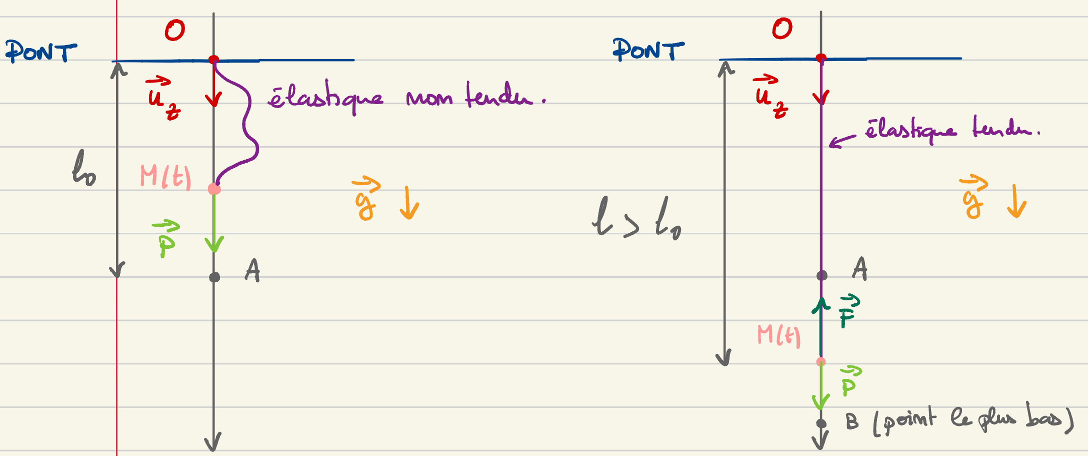
Ex. 7 Saut à l'élastique.

1) Dans tout l'exercice :

Système étudié : sauteur assimilé à un point matériel M de masse m.

Référentiel : du pont supposé galiléen.

Repère : on pourra supposer la trajectoire rectiligne, verticale, on introduit un repère $(O, \vec{u_z})$.



$\vec{OM}(t) = z(t)\,\vec{u_z}$; $\vec{v}(t) = \dot{z}(t)\,\vec{u_z}$; $\vec{a}(t) = \ddot{z}(t)\,\vec{u_z}$.

Bilan des forces :

Phase I (tant que $z(t) < z_A$ càd $z(t) < \ell_0$) :

– poids uniquement $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\,\vec{u_z}$.

Phase II : ($z(t) > l_0$; l'élastique se tend)
- poids $\vec{P} = + m g \vec{u_z}$;
- force de rappel $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u_z} = -k(z(t) - l_0)\vec{u_z}$

2) On applique le PFD dans la phase I.

$$m\vec{a} = \vec{P} \Rightarrow m\ddot{z}(t) = mg \Rightarrow \ddot{z}(t) = g.$$

On intègre en tenant compte des C.I. : $z(t=0) = 0$
et $\dot{z}(t=0) = 0$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = gt \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{1}{2} g t^2.$$

L'élastique se tend lorsque $z(t) = l_0$ càd à
l'instant t_A tq $z(t_A) = l_0 \Rightarrow t_A = \sqrt{2l_0/g}$

On en déduit la vitesse à la fin de la chute libre :

$$\underline{v_A = \dot{z}(t_A) = \sqrt{2gl_0}} \;//$$

A.N. $v_A = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 20} = \underline{20 \ m.s^{-1}}$ /

3) La hauteur de chute est donnée par la coordonnée z_B
du point B le plus bas. C'est le point où la
vitesse du sauteur s'annule et change de signe
(le sauteur remonte !).

On applique le PFD dans la phase II :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \Rightarrow m\ddot{z}(t) = mg - k(z(t) - l_0)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{z}(t) + \frac{k}{m} z(t) = g + \frac{k}{m} \ell_0$$ éq° de l'oscillateur harmonique.

Posons : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

alors $\ddot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = g + \frac{k}{m} \ell_0$.

Solution générale de l'éq° homogène : $z_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

Solution part. de l'éq° avec second membre : $z_p(t) = \ell_0 + \frac{mg}{k}$

Solution générale : $z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \ell_0 + \frac{mg}{k}$

Rq : $z(t) = A \cos(\omega_0 (t - t_A)) + B \sin(\omega_0 (t - t_A)) + \ell_0 + \frac{mg}{k}$

est aussi solution de l'éq° et a le mérite de faire apparaître explicitement l'origine de la phase II.

Pour exprimer les C.I. On a intérêt à redéfinir l'origine des temps en posant : $t' = t - t_A$.

tq $z(t') = A \cos(\omega_0 t') + B \sin(\omega_0 t') + \frac{mg}{k} + \ell_0$

avec les C.I : $\begin{cases} z(t'=0) = \ell_0 \\ \dot{z}(t'=0) = v_A \end{cases}$

De plus : $\dot{z}(t') = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t') + B\omega_0 \cos(\omega_0 t')$

Les C. I. donnent : $\begin{cases} A = -mg/k \\ B = V_A/\omega_0 \end{cases}$

$$z(t') = l_0 - \frac{mg}{k}\left(\cos(\omega_0 t') - 1\right) + \frac{V_A}{\omega_0}\sin(\omega_0 t')$$

Pour trouver la coord. du point B, on peut faire comme d'habitude et chercher l'instant où la vitesse s'annule :

$$\dot{z}(t') = +\omega_0 \frac{mg}{k}\sin(\omega_0 t') + V_A \cos(\omega_0 t') = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\omega_0 t') = -\frac{V_A k}{mg\,\omega_0} \quad (1)$$

$\tan(\omega_0 t') \rightarrow \pi$-périodique.

Résolution graphique de (1)

$-\frac{V_A k}{mg\,\omega_0}$

t'_0

$= -\arctan\left(\frac{V_A k}{mg\omega_0}\right)$

c'est cette solution que l'on cherche.

$t'_1 = \pi - \arctan\left(\frac{V_A k}{mg\omega_0}\right)$

1ère solution positive !

La vitesse s'annule la première fois à l'instant t_1, qui correspond au maximum de $z(t)$, coord. du pt B.

On trouve $z_B = z(t_1)$. Il faut réinjecter l'expression de t_1 dans $z(t_1)$ et utiliser les formules

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; ; \; \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Tout calcul fait on trouve :

$$z_B = l_0 + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{V_A}{\omega_0}\right)^2} + \frac{mg}{k} \quad //$$

Résultat que l'on aurait pu retrouver simplement en cherchant l'élongation <u>maximale</u> de l'élastique qui correspond au maximum de la fonction sinusoïdale. En effet on peut écrire :

$$z(t) = Z_m \cos(\omega_0 t' + \varphi) + \frac{mg}{k} + l_0$$

$$\text{avec } Z_m = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Rightarrow z_B = Z_m + \frac{mg}{k} \quad l_0 \quad //$$

4) Calculons l'accélération dans la phase II :

$$\ddot{z}(t') = + \omega_0^2 \frac{mg}{k} \cos(\omega_0 t') - \omega_0^2 \frac{V_A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t')$$

$$= + g \cos(\omega_0 t') - \omega_0 V_A \sin(\omega_0 t')$$

ou en utilisant l'écriture :

$$z(t') = Z_m \cos(\omega_0 t' + \varphi) + l_0 + \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow \ddot{z}(t') = - \omega_0^2 Z_m \cos(\omega_0 t' + \varphi)$$

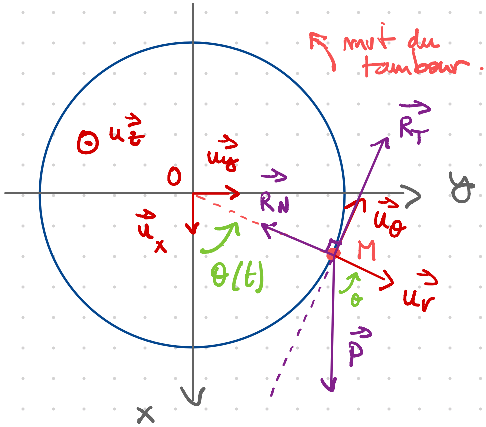
Ainsi $|\ddot{z}(t')|$ est maximale lorsque $\cos(\omega_0 t' + \varphi)$ càd à l'instant t_1 où $z(t)$ est max, càd au point B !

$$\Rightarrow a_{max} = |\ddot{z}(t'_1)| = + \omega_0^2 Z_m .$$

$$= \frac{k}{m} \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \left(\frac{V_A}{\omega_0}\right)^2}$$

$$= \sqrt{g^2 + \omega_0^2 V_A^2} > g .$$ //

Ex 9. Chaussette séchant dans un sèche-linge.



Syst. chaussette assimilée à un pt mat.
supposé galiléen.

Réf : du sèche-linge ou de la buanderie, supposé galiléen.

Repère : cartésien $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$. Tant que la chaussette est collée au tambour, le mvt du point est circulaire uniforme, de centre O, de rayon R, à la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t) = \omega > 0$ constante.

$$\vec{OM}(t) = R\vec{u_r} \quad ; \quad \vec{v}(t) = R\omega\,\vec{u_\theta} \quad ; \quad \vec{a}(t) = -R\omega^2\,\vec{u_r}$$

Bilan des forces : - poids $\vec{P} = mg\,\vec{u_x} = mg\cos\theta\,\vec{u_r} - mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

- réaction normale $\vec{R_N} = +\|\vec{R_N}\|\,\vec{u_r}$
- réaction tangentielle $\vec{R_T} = R_T\,\vec{u_\theta}$

positif ou négatif ?
à voir... en tout cas cette force doit exister, sinon la chaussette glisserait le long du tambour !

Ce sont les frottements qui permettent le mvt de rotation de la chaussette !

<u>PFD</u> $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{R_T}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -mR\omega^2 = mg\cos\theta + \|\vec{R_N}\| \\ 0 = -mg\sin\theta + R_T \end{cases}$$

$\Rightarrow R_T = +mg\sin\theta$ $\rightarrow$ d'où l'orientation sur le graphe !

et $\|\vec{R_N}\| = -mR\omega^2 - mg\cos\theta$ //

La chaussette décolle lorsque la réaction normale s'annulle : $\|\vec{R_N}\| = 0 \Rightarrow \cos\theta = -\dfrac{R\omega^2}{g}$

<u>AN</u> : $\cos\theta = -0{,}25 \times \dfrac{(50 \times 2\pi/60)^2}{9{,}81}$

$\theta = 134°$ // $\rightarrow$ au dessus de l'horizontal, <u>ok</u> !