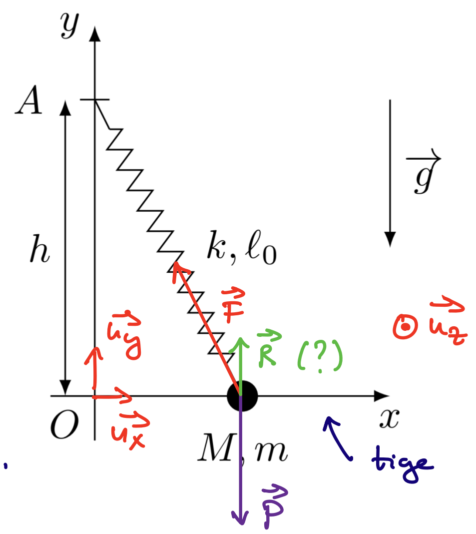
Ex. 5 Equilibres stables et instables.



1) Le point M est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- la force de rappel du ressort
  $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$
  avec $\vec{u} = \dfrac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|}$ le vecteur unitaire orienté vers l'ext. du ressort.
- une éventuelle force de réaction de la tige $\vec{R} = R_y\vec{u_y} + R_z\vec{u_z}$. (pas de composante selon $\vec{u_x}$ en l'absence de frottements sur la tige).

Le point M est astreint à se déplacer le long de l'axe (Ox)
$\Rightarrow$ le mvt est unidimensionnel :

$$\vec{OM} = x(t)\vec{u_x} \quad ; \quad \vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u_x} \quad ; \quad \vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u_x}$$

Par conséquent $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont $\perp$ à chaque instant à $\vec{v}$
$\Rightarrow$ elles ne travaillent pas.

Reste la force $\vec{F}$ qui est conservative (résultat du cours).
Donc le mvt est bien unidimensionnel et conservatif.

2) La force $\vec{F}$ dérive de l'énergie potentielle : $E_p(\ell) = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$
or ici $\ell = \sqrt{h^2 + x^2}$ donc on écrira E_p comme une fonction de x :

$$E_p(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{h^2 + x^2} - \ell_0\right)^2$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{h^2 + x(t)^2} - \ell_0\right)^2$$

or E_m est une constante du mvt donc :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + k\frac{\dot{x}x}{\sqrt{h^2 + x^2}}\left(\sqrt{h^2 + x^2} - \ell_0\right) = 0$$

En supposant que $\dot{x}(t)$ n'est pas identiquement nulle on trouve l'éq° du mvt :

$$m\ddot{x}(t) = -k \frac{x(t)}{\sqrt{h^2+x(t)^2}}\left(\sqrt{h^2+x(t)^2} - l_0\right)$$

3) Étudions les variations de $E_p(x)$.

4)

$$\frac{dE_p}{dx}(x) = k\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}\left(\sqrt{x^2+h^2} - l_0\right)$$

alors $\frac{dE_p}{dx}(x) = 0 \iff x = 0$ ou $\sqrt{x^2+h^2} = l_0$

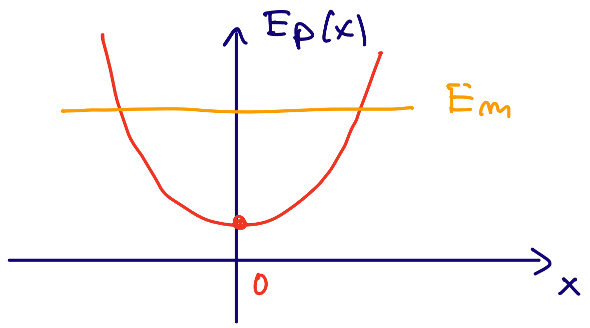
$\iff x = 0$ ou $x^2 = l_0^2 - h^2$

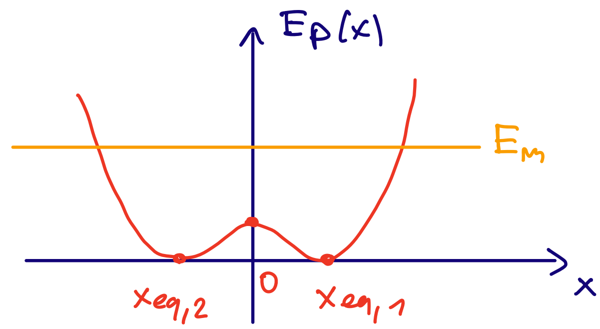
Si $l_0 < h$ alors la seule racine est $x = 0$.

Si $l_0 > h$ alors il y a 2 autres racines :

$$\begin{cases} x_{eq,1} = +\sqrt{l_0^2 - h^2} \\ x_{eq,2} = -\sqrt{l_0^2 - h^2} \end{cases}$$

En étudiant le signe de la dérivée on aboutit aux graphes suivants :





En superposant le graphe de l'énergie mécanique (constante) on constate qu'il <u>n'existe que des états liés.</u>

5) Approximation harmonique au voisinage de la pos. d'eq. stable $x_{eq,1}$.

$$E_p(x) \simeq \underbrace{E_p(x_{eq,1})}_{=0} + (x - x_{eq,1})\underbrace{\frac{dE_p}{dx}(x_{eq,1})}_{=0} + \frac{1}{2}(x - x_{eq,1})^2 \underbrace{\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq,1})}_{=k_{eff}}$$

Période des petites oscillations : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}}$

Calculons $k_{eff} = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq,1})$.

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(k\,x - k\,\frac{l_0\,x}{\sqrt{x^2+h^2}}\right)$$

$$= k - k\,l_0\,\frac{\sqrt{x^2+h^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+h^2}}}{x^2+h^2}$$

$$= k\left(1 - l_0\,\frac{x^2+h^2 - x^2}{(x^2+h^2)^{3/2}}\right)$$

$$= k\left(1 - l_0\,\frac{h^2}{(x^2+h^2)^{3/2}}\right)$$

$$k_{eff} = k\left(1 - l_0\,\frac{h^2}{(l_0^2 - h^2 + h^2)^{3/2}}\right)$$

$$= k\left(1 - l_0\,\frac{h^2}{l_0^3}\right) = k\,\frac{l_0^2 - h^2}{l_0^2}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,\frac{\sqrt{l_0^2-h^2}}{l_0} \quad \Rightarrow \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,\frac{l_0}{\sqrt{l_0^2-h^2}}$$