TD 18 : Forces centrales

Ex 1 : Mouvements dans le système solaire

1) On utilise la conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r} = cst \qquad (k = G M_T M_S)$$

$$v_{Janvier} > v_{Juillet} \Rightarrow r_{Janvier} < r_{Juillet}.$$

Cela n'explique pas l'alternance des saisons, On peut poser le même exercice à Sidney ! L'alternance des saisons est due à l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre par rapport au plan de l'écliptique

2) On utilise la 3ème loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = cste \Rightarrow T_{mars} = \left(\frac{a_{mars}}{a_{Terre}}\right)^{3/2} T_{Terre}$$

Prenons $\frac{a_{mars}}{a_{Terre}} \simeq 1,5$

$$T_{mars} = (1,5)^{3/2} \times 1 \text{ an} = 1,84 \text{ an}.$$

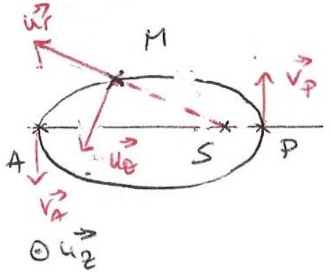
(1 an = 1 année terrestre ≃ 365 jours terrestre)
(valeur réelle $T_{mars} = 1,88$ an).

4) La comète de Halley est en première approx. soumise uniquement à la force grav. $\vec{F}$ du soleil, qui est une force centrale.

$$\frac{d\vec{L_S}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_S(\vec{F}) = 0 \Rightarrow \text{donc } \vec{L_S} \text{ est conservé}$$ 3

5) $\vec{L_S} = m\,\vec{SM} \wedge \vec{v} = m(r\vec{u_r}) \wedge (\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta})$

$= m\,r^2\dot{\theta}\,\vec{u_z} = \vec{cste}$



en P et A, $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u_\theta}$:

$\vec{v_P} = r_P\,\dot{\theta}_P\,\vec{u_\theta}$ et $\vec{v_A} = r_A\dot{\theta}_A\vec{u_\theta}$

Ainsi: $r_P^2\,\dot{\theta}_P = r_A^2\,\dot{\theta}_A \Leftrightarrow r_P v_P = r_A v_A$

// Finalement $v_P = \dfrac{r_A}{r_P} v_A$ //

A.N. $v_P = \dfrac{5,29 \times 10^{12}}{87,8 \times 10^9}\ 879$

$v_P = 5,3 \times 10^4\ m.s^{-1}$ /

Ex 2 : Énergie d'un satellite.

1). les orbites hautes et basses sont circulaires.

Soient v_1 la vitesse sur l'orbite basse de rayon r_1

v_2 ——— haute ——— r_2

Alors $V_1 = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r_1}}$ // et $v_2 = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r_2}}$ //

A.N. $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg. $r_1 = 8 \times 10^6$ m

$G = 6,67 \times 10^{-11}$ S.I. $r_2 = 40 \times 10^6$ m

$v_1 = 7,1 \text{ km.s}^{-1}$ // $v_2 = 3,1 \text{ km.s}^{-1}$ //

2) L'orbite basse a pour énergie mécanique

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{k}{r_1} \qquad (k = G m M_T)$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{GM_T}{r_1} - \frac{GmM_T}{r_1} = - \frac{mGM_T}{2r_1}$$

L'orbite de transfert a pour énergie mécanique $E_t = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{k}{r} = - \frac{k}{2a}$

$$= - \frac{GmM_T}{2a}$$

avec a le demi-grand axe de l'ellipse.

Ici $a = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$. Noter que V dépend de la position.

Au point A où a lieu le transfert :

$$E_t = \frac{1}{2} m V_A^2 - \frac{k}{r_1}$$

or $- \dfrac{k}{r_1} = E_1 - \dfrac{1}{2} m V_1^2$

soit $E_t = \frac{1}{2} m V_A^2 - \frac{1}{2} m V_1^2 + E_1$

$$\frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2} m V_1^2 + \underbrace{E_t - E_1}_{\text{énergie cinétique à fournir pour passer d'une orbite à l'autre au pt A.}}$$

Rq : $2a > 2r_1$ donc $E_t > E_1$.

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + E_t - E_1$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{G M_T}{r_1} - \frac{G m M_T}{2a} + \frac{m G M_T}{2 r_1}$$

$$= m G M_T \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a} \right) = m G M_T \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + r_2} \right)$$

$$= \frac{m G M_T}{r_1} \left(\frac{r_2}{r_1 + r_2} \right)$$

$$= m v_1^2 \frac{r_2}{r_1 + r_2}$$

Finalement $V_A = V_1 \sqrt{\frac{2 r_2}{r_1 + r_2}} > V_1$

et $\Delta V_A = V_A - V_1 = V_1 \left(\sqrt{\frac{2 r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right)$ // > 0

A.N. $\Delta V_A = 2,1 \text{ km.s}^{-1}$ //

3)

4

$\Delta V_B = V_2 - V_B = V_2 \left(1 - \sqrt{\frac{2 r_1}{r_1 + r_2}} \right) > 0$ //

A.N $\Delta V_B = 1,3 \text{ km.s}^{-1}$ //

B et étant à l'apogée (pt le plus loin) et A au périgée (pt le plus près) on peut écrire $V_B = V_A \frac{r_1}{r_2} < V_A$

et $\Delta V_B = V_2 - V_B = V_2 - V_1 \frac{r_1}{r_2} \sqrt{\frac{2 r_2}{r_1 + r_2}} = V_2 \left(1 - \sqrt{\frac{2 r_1}{r_1 + r_2}} \right.$

4) le temps du transfert Δt de A à B est la moitié de la période T de parcours de l'orbite elliptique. Or $T = a^{3/2}\sqrt{\dfrac{4\pi^2}{GM_T}}$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{T}{2} = a^{3/2}\frac{\pi}{\sqrt{GM_T}}$$

A.N : $\Delta t = 5h\,7\,min$

Ex 3 : Force de rappel isotrope : On étudie une particule de masse m, ds un réf. R galiléen

1) Posons $\vec{u}_r = \dfrac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} = \dfrac{\vec{OM}}{r}$

alors $\vec{F} = -kr\,\vec{u}_r = -\dfrac{dE_p}{dr}\vec{u}_r$; $E_p(r) = \frac{1}{2}kr^2$

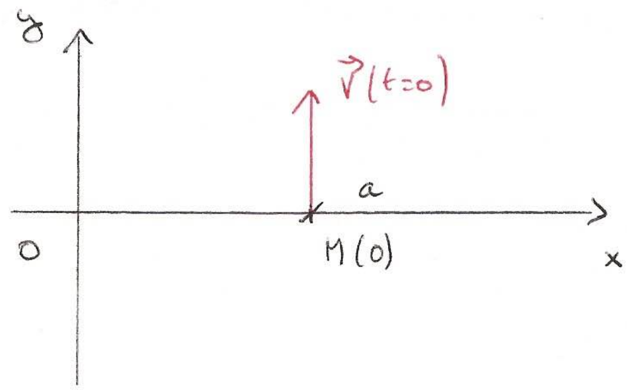
$\vec{F}$ dérive effectivement de l'énergie potentielle $E_p(r) = \frac{1}{2}kr^2$

2) $\vec{F}$ est une force centrale de centre O

Ainsi $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM}\wedge\vec{F} = \vec{0}$

et $\dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \vec{cste}$

avec $\vec{L}_O = \vec{OM}\wedge(m\vec{v})$



À $t=0$: $\vec{OM}(t=0) = a\,\vec{u_x}$
et $\vec{v}(t=0) = v_0\,\vec{u_y}$

Ainsi $\vec{L}_O = m\,a\,v_0\,\vec{u_x}\wedge\vec{u_y} = m a v_0 \vec{u_z}$

Puisque $\vec{L}_O = \vec{cste}$ le mvt est situé dans le plan $\perp$ à $\vec{L}_O$ càd (Oxy)

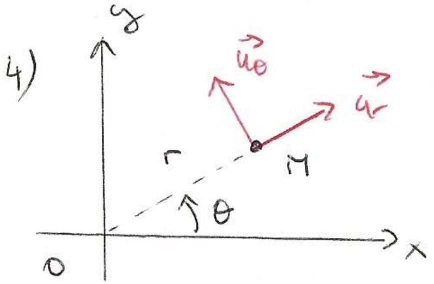
3) le système n'est soumis qu'à une force conservative $\Rightarrow E_m = cste$.

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k r^2$$

à $t=0$, $v = v_0$ et $r = a$.

Ainsi: $$\underline{E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k a^2}$$

4)



En coordonnées polaires ds le plan (Oxy)

$\vec{OM} = r\,\vec{u_r}$

et $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$.

$$\vec{L_O} = m r^2 \dot{\theta}\,\vec{u_z} = \vec{cste} \Rightarrow \underline{r^2\dot{\theta} = cste = \mathcal{C}}$$

(constante des aires)

$$\vec{L_O} = \cancel{m}\,\mathcal{C}\,\vec{u_z} = \cancel{m}\,a v_0\,\vec{u_z}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\mathcal{C} = a v_0}$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k r^2$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k r^2$$

$$\underline{E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} + \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k a^2}$$

5) Posons $E_{p,eff}(r) = \dfrac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} + \dfrac{1}{2} k r^2$

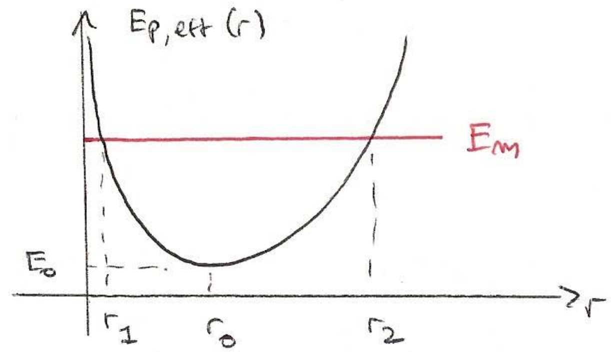
Etudions son allure

$$\frac{d E_{p,eff}}{dr}(r) = -\frac{m\mathcal{C}^2}{r^3} + k r$$

Posons $r_0 = \left(\dfrac{m\mathcal{C}^2}{k}\right)^{1/4} = \left(\dfrac{m}{k} a^2 v_0^2\right)^{1/4}$

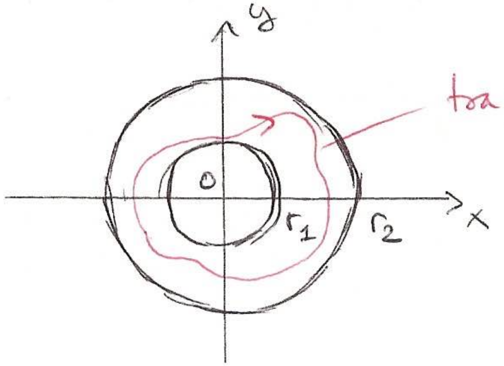
r	0		r_0		$+\infty$
$\frac{dE_{p,eff}}{dr}$		$-$	0	$+$	
$E_{p,eff}(r)$		↘	E_0	↗	

$$E_0 = E_{p,eff}(r_0) = k r_0^2$$



On superpose la courbe de l'énergie mécanique. Tous les états sont liés.

On observe que $r_1 \leq r \leq r_2$, càd que la trajectoire est comprise entre 2 cercles de rayons r_1 et r_2.



Détermination de r_1 et $r_2 \Rightarrow$ page 6

Remarque : 1) si $E_m = E_0$ alors $r_1 = r_2 = r_0$

La trajectoire est circulaire : $\dot{r} = 0$

$$E_m = k r_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k r^2 \text{ et } r = r_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} k r_0^2 \quad (E_c = E_p)$$

et $v = \sqrt{\frac{k}{m}}\, r_0$ (le mvt est uniforme)

2) Ce n'est pas le cas ici mais si $v_0 = 0$ alors $\mathcal{C} = 0$.

$\Rightarrow$ le mvt est rectiligne, selon (Ox)

(on retrouve l'oscillateur harmonique 1D).

6) On applique le PFD au système :

$$m\vec{a} = -k\vec{OM}$$

avec $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u_x} + \ddot{y}\,\vec{u_y}$

$\vec{OM} = x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y}$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0 \end{cases}$$

Posons $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On trouve 2 eq$^{\circ}$s d'OH découplées.

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

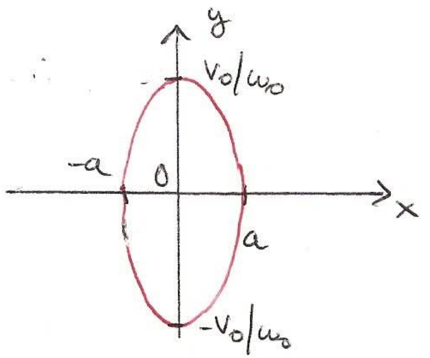
$$y(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)$$

Utilisons les CI : $\begin{cases} x(0) = a & y(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 & \dot{y}(0) = V_0 \end{cases}$

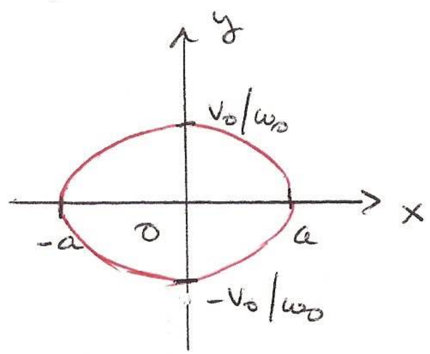
$$x(t) = a\cos(\omega_0 t)$$
$$y(t) = \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

c'est la trajectoire paramétrée d'une ellipse :

En effet $\quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{(V_0/\omega_0)} = 1$



$a < V_0/\omega_0$



$a > V_0/\omega_0$

Complément Q5 : détermination de r_1 et r_2

On résout $E_m = E_{p,eff}(r)$

$$\Leftrightarrow \quad E_m = \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} + \frac{1}{2}kr^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}kr^4 - E_m r^2 + \frac{m\mathcal{C}^2}{2} = 0$$

Posons $\quad R = r^2$

alors $\quad R^2 - \dfrac{2E_m}{k}R + \dfrac{m\mathcal{C}^2}{k} = 0$

$$\Delta = 4\left(\frac{E_m}{k}\right)^2 - 4\,\frac{m\mathcal{C}^2}{k}$$
$$= 4\left(\frac{E_m^2}{k^2} - \frac{m\mathcal{C}^2}{k}\right)$$

or $\quad \dfrac{m\mathcal{C}^2}{k} = r_0^4 = \dfrac{E_0^2}{k^2}$

donc $\quad \Delta = 4\,\dfrac{E_m^2 - E_0^2}{k^2} \geq 0$

si $E_m > E_0$ l'éq° a 2 racines

si $E_m = E_0$ —— 1 racine.

$$R = +\frac{E_m}{k} \pm \frac{1}{k}\sqrt{E_m^2 - E_0^2}$$

les 2 racines sont positives. On trouve

$$r_1 = \left(\frac{E_m}{k} - \frac{1}{k}\sqrt{E_m^2 - E_0^2}\right)^{1/2}$$

$$r_2 = \left(\frac{E_m}{k} + \frac{1}{k}\sqrt{E_m^2 - E_0^2}\right)^{1/2}$$

$$E_m^2 - E_0^2 = \left(\frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2} k a^2\right)^2 - \left(k r_0^2\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} m^2 V_0^4 + \frac{1}{4} k^2 a^4 + \frac{1}{2} m k V_0^2 a^2 - k^2 \frac{m}{k} a^2 V_0^2$$

$$= \frac{1}{4} m^2 V_0^4 + \frac{1}{4} k^2 a^4 - \frac{1}{2} m k V_0^2 a^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{1}{2} k a^2\right)^2$$

$$\sqrt{E_m^2 - E_0^2} = \left|\frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{1}{2} k a^2\right|$$

si $a < \frac{V_0}{\omega_0} = V_0 \sqrt{m/k}$ alors $\sqrt{E_m^2 - E_0^2} = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{1}{2} k a^2$

alors $r_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\cancel{\frac{1}{2} m V_0^2} + \frac{1}{2} k a^2 - \cancel{\frac{1}{2} m V_0^2} + \frac{1}{2} k a^2\right)^{1/2}$

$$= a$$

et $r_2 = \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{1}{2} m V_0^2 + \cancel{\frac{1}{2} k a^2} + \frac{1}{2} m V_0^2 - \cancel{\frac{1}{2} k a^2}\right)$

$$= \sqrt{m/k}\; V_0$$

Si $a > V_0/\omega_0$ au contraire $r_1 = \sqrt{m/k}\; V_0$

et $r_2 = a$.