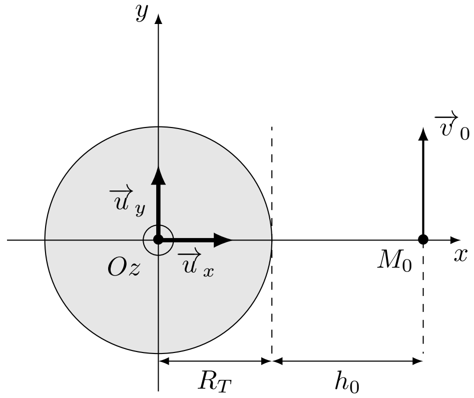
TD 18
Forces centrales

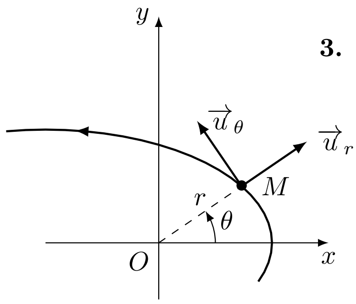
Ex. 4 Lancement d'un satellite. Vecteur de Laplace-Runge-Lenz.

1. Dans tout le problème, le système étudié est le satellite assimilé à un point matériel M de masse m, dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. En suivant l'énoncé, introduisons un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, représenté sur la figure ci-dessous. On y a repéré la position initiale du satellite et sa vitesse initiale.



Le système n'est soumis qu'à la force gravitationnelle $\vec{F} = -\dfrac{GM_Tm}{r^2}\vec{u}_r$ exercée par la Terre, avec $r = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$.

2. On applique le théorème du moment cinétique au satellite : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$, avec $\vec{L}_O = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ le moment cinétique calculé au point O et $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ le moment de la force $\vec{F}$ calculé au point O. La force $\vec{F}$ étant centrale, $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$ et $\vec{L}_O(t) = \overrightarrow{\text{cste}}$. En utilisant les conditions initiales, $\overrightarrow{OM}(t = 0) = (R_T + h_0)\vec{u}_x$ et $\vec{v}(t = 0) = v_0\vec{u}_y$, on en déduit $\boxed{\vec{L}_O(t) = m(R_T + h_0)v_0\vec{u}_z}$. **Le moment cinétique étant conservé, la trajectoire du satellite est contenue dans le plan orthogonal à $\vec{L}_O$, c'est-à-dire le plan (Oxy) .**



3. On introduit le système de coordonnées polaires (r, θ) dans le plan (Oxy) , ainsi que la base de projection mobile $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associée.

Les éléments cinétiques du point M s'écrivent : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. On en déduit l'expression du moment cinétique : $\vec{L}_O(t) = mr(t)^2\dot{\theta}(t)\vec{u}_z$. Puisque le moment cinétique est une constante indépendante du temps, il vient finalement : $\boxed{r(t)^2\dot{\theta}(t) = \text{cste} = \mathcal{C} = (R_T + h_0)v_0}$.

4. Voir exercice correspondant dans la capacité numérique du cours.
5. Voir exercice correspondant dans la capacité numérique du cours.
6. Voir exercice correspondant dans la capacité numérique du cours.
7. Essayons de montrer que $\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\mathrm{d}t} - GM_Tm\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \wedge \vec{L}_O + \vec{v} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} - GM_Tm\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} \ . \tag{1}$$

De plus, d'après le PFD appliqué au système, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\vec{F}}{m} = -\dfrac{GM_T}{r^2}\vec{u}_r$. On a déjà montré que $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_O}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$. Enfin, $\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$. Ainsi :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{R}}{\mathrm{d}t} = -\frac{GM_T}{r^2}\overrightarrow{u}_r \wedge (mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z) - GM_Tm\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta = \overrightarrow{0}} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{u}_r \wedge \overrightarrow{u}_z = -\overrightarrow{u}_\theta\ . \tag{2}$$

Le vecteur $\overrightarrow{R}$ est constant.

8. On cherche à exprimer $\overrightarrow{R}$ en coordonnées cartésiennes. Puisque $\overrightarrow{R}$ est constant, on peut le calculer à l'instant initial $t = 0$, en utilisant $\overrightarrow{v}(t = 0) = v_0\overrightarrow{u}_y$, $\overrightarrow{L}_0 = m\mathcal{C}\overrightarrow{u}_z$, et $\overrightarrow{u}_r(t = 0) = \overrightarrow{u_x}$. Ainsi

$$\overrightarrow{R} = v_0\overrightarrow{u}_y \wedge (m\mathcal{C}\overrightarrow{u}_z) - GM_Tm\overrightarrow{u}_x \Leftrightarrow \overrightarrow{R} = \big(m\mathcal{C}v_0 - GM_Tm\big)\overrightarrow{u}_x\ . \tag{3}$$

Finalement, $\boxed{\overrightarrow{R} = R_x\overrightarrow{u}_x}$ avec $\boxed{R_x = m(\mathcal{C}v_0 - GM_T)}$.

9. Un calcul direct, utilisant l'expression de $\overrightarrow{R}$ en coordonnées cartésiennes, donne $\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{OM} = (R_xr)\overrightarrow{u}_x\cdot\overrightarrow{u}_r = R_xr\cos(\theta)$. Une deuxième méthode, utilisant la définition de $\overrightarrow{R}$ conduit à :

$$\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{OM} = \big(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{L}_O\big)\cdot\overrightarrow{OM} - GM_Tm\overrightarrow{u}_r\cdot\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{OM} = \big(\overrightarrow{L}_O\wedge\overrightarrow{OM}\big)\cdot\overrightarrow{v} - GM_Tmr = m\mathcal{C}^2 - GM_Tmr\ . \tag{4}$$

Finalement : $\boxed{\overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{OM} = rR_x\cos(\theta) = m(\mathcal{C}^2 - GM_Tr)}$.

10. La dernière égalité conduit à :

$$r = \frac{m\mathcal{C}^2}{GM_Tm + R_x\cos(\theta)} = \frac{\frac{\mathcal{C}^2}{GM_T}}{1 + \frac{R_x}{GM_Tm}\cos(\theta)} = \frac{\frac{\mathcal{C}^2}{GM_T}}{1 + \big(\frac{\mathcal{C}v_0}{GM_T} - 1\big)\cos(\theta)} \tag{5}$$

En posant $\boxed{p = \dfrac{\mathcal{C}^2}{GM_T}}$ et $\boxed{e = \dfrac{\mathcal{C}v_0}{GM_T} - 1}$, on arrive bien à l'équation demandée.

11. En utilisant l'expression de la constante des aires $\mathcal{C} = (R_T + h_0)v_0$, il vient $e = \dfrac{(R_T + h_0)v_0^2}{GM_T} - 1$.

— Si $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{GM_T}{(R_T + h_0)}}}$ alors $e = 0$ et la trajectoire est un **cercle**. C'est bien la vitesse d'un satellite sur une orbite circulaire.

— Si $\boxed{\sqrt{\dfrac{GM_T}{(R_T + h_0)}} < v_0 < \sqrt{\dfrac{2GM_T}{(R_T + h_0)}}}$ alors $0 < e < 1$ et la trajectoire est une **ellipse**.

— Si $\boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM_T}{(R_T + h_0)}}}$ alors $e = 1$ et la trajectoire est une **parabole**. On reconnaît la **vitesse de libération du satellite**, c'est-à-dire la vitesse minimale nécessaire pour que le satellite quitte l'attraction gravitationnelle de la Terre.

— Enfin, si $\boxed{v_0 > \sqrt{\dfrac{2GM_T}{(R_T + h_0)}}}$ alors $e > 1$ et la trajectoire est une **hyperbole**.

12. L'énergie mécanique E_m du satellite s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GmM_T}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m\mathcal{C}^2}{2r^2} - \frac{GmM_T}{r}\ ,$$

où dans la dernière égalité l'on a fait usage de la constante des aires.

Le système n'étant soumis qu'à des forces conservatives, E_m est une constante indépendante du temps que l'on peut évaluer à l'instant initial $t = 0$. À l'instant initial, $\overrightarrow{OM}(t = 0) = (R_T + h_0)\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{v} = v_0\overrightarrow{u}_y$, c'est-à-dire $\theta(t = 0) = 0$ et $\dot{r}(t = 0) = 0$ (la position initiale correspond au **périgée**, point de l'orbite le plus proche de la Terre).

L'équation polaire de la trajectoire donne alors $r(t = 0) = (R_T + h_0) = \frac{p}{1+e}$. En réinjectant dans E_m on trouve :

$$E_m = \frac{m\mathcal{C}^2(1 + e)^2}{2p^2} - \frac{GmM_T(1 + e)}{p} = \frac{mGM_T(1 + e)^2)}{2p} - \frac{GmM_T(1 + e)}{p} \Leftrightarrow \boxed{E_m = -\frac{GmM_T}{2p}(1 - e^2)}\ . \tag{6}$$

On en déduit que si $e < 1$ alors $E_m < 0$ ce qui correspond à un état lié (en l'occurence une ellipse), si $e = 1$ alors $E_m = 0$ et la trajectoire est une parabole, et si $e > 1$ alors $E_m > 0$ et la trajectoire est une hyperbole.
Remarque 1 : Dans le cas d'une ellipse, le demi-grand axe est donné par

$$a = \frac{r(\theta = 0) + r(\theta = \pi)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right) = \frac{p}{1-e^2}\ . \tag{7}$$

On retrouve le résultat classique : $E_m = -\frac{GmM_T}{2a}$. Pour décrire géométriquement l'ellipse, on a besoin de deux paramètres indépendants. L'équation de la conique conduit naturellement à choisir p et e mais on pourrait très bien choisir a et e. L'énergie mécanique des orbites elliptiques ne dépendant en fait que du demi-grand axe a et non de l'excentricité e, on peut ainsi construire une infinité d'orbites elliptiques ayant la même énergie mécanique mais des excentricités différentes.
Remarque 2 : Le vecteur $\overrightarrow{R}$ contrôle l'excentricité de l'orbite. En effet : $R_x = m(\mathcal{C}v_0 - GM_T) = GmM_T e$.