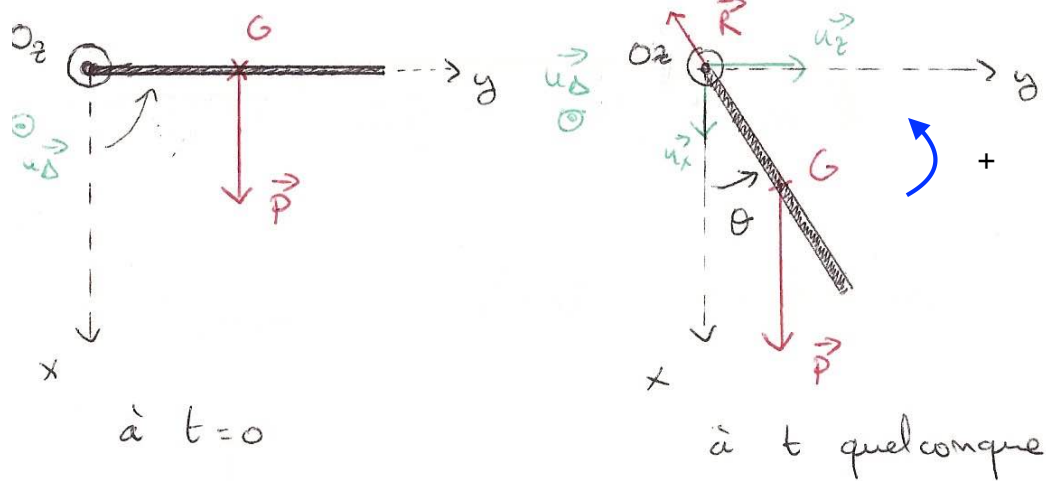


Feuille d'exercice 19 : Solides en rotation.



On étudie le mot de la barre dans le ref. terrestre supposé galiléen. On introduit un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. L'axe (Δ) de rotation est confondu avec l'axe (Oz) .

On repère la barre par l'angle orienté θ entre (Ox) et (OG) .

Bilan des forces :

- poids \vec{P} appliqué au pt G, au centre de la barre
- réaction \vec{R} de la liaison pivot, supposée parfaite, appliquée au pt O.

On applique le TMC par rapport à l'axe (Δ) . ①

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R})$$

avec $L_\Delta = J \cdot \dot{\theta}$ (contrôler le signe de L_Δ : si $\dot{\theta} > 0$ alors la barre tourne dans le sens direct autour de l'axe orienté (Δ) donc $L_\Delta > 0$.)

et $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ (\vec{R} passe par (Δ))

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = (\vec{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_\Delta = -mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

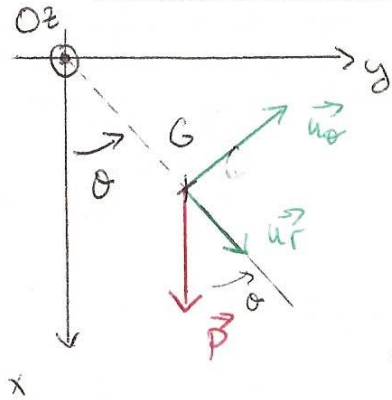
3 méthodes de calcul de $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})$

* méthode directe :

$$\vec{OG} \wedge \vec{P} = \underbrace{- \|\vec{OG}\| \|\vec{P}\| \sin(\theta)}_{\substack{\text{norme du vecteur} \\ \text{sous par la} \\ \text{règle de la} \\ \text{main droite}}} \underbrace{\vec{u}_\Delta}_{\substack{\text{vecteur } \perp \\ \text{à } \vec{OG} \text{ et } \vec{P}}}$$

$$= - \frac{l}{2} mg \sin \theta \vec{u}_\Delta$$

⊕ En introduisant une base de projection mobile.

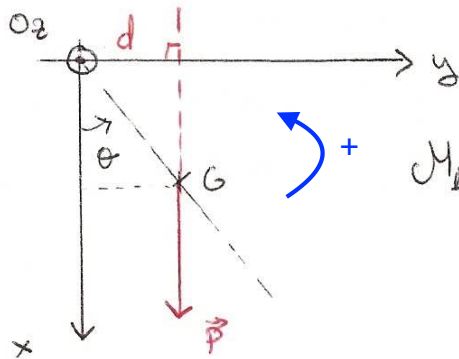


$$\vec{P} = mg \cos \theta \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{OG} = \frac{l}{2} \vec{u}_r$$

$$\vec{OG} \wedge \vec{P} = -mg \frac{l}{2} \sin \theta \underbrace{\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta}_{=\vec{u}_z = \vec{u}_\Delta}$$

⊕ En utilisant le bras de levier du poids.



$$M_\Delta(\vec{P}) = - \|\vec{P}\| d$$

\uparrow règle de la main droite \uparrow bras de levier.

$$d = \frac{l}{2} \sin \theta$$

$$M_\Delta(\vec{P}) = -mg \frac{l}{2} \sin \theta$$

Enfinement $J \ddot{\theta} = -mg \frac{l}{2} \sin \theta$ //

Pour intégrer cette eq°, on multiplie par $\dot{\theta}$

$$J \dot{\theta} \ddot{\theta} = -mg \frac{l}{2} \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mg \frac{l}{2} \cos \theta \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mg \frac{l}{2} \cos \theta = \text{cte}$$

La constante est déterminée par les C.I.

En supposant $\dot{\theta}(t=0) = 0$, et avec $\theta(t=0) = \frac{\pi}{2}$

$$\text{cte} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mg \frac{l}{2} \cos \theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{mg l}{J} \cos \theta}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta} = \pm \sqrt{3 \frac{g}{l} \cos \theta} //$$

lorsque la tige est verticale ($\theta = 0$) alors

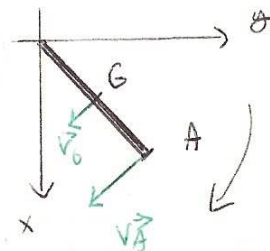
$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{3g/l} //$$

e) Tous les points de la barre ont la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

le pt le plus bas

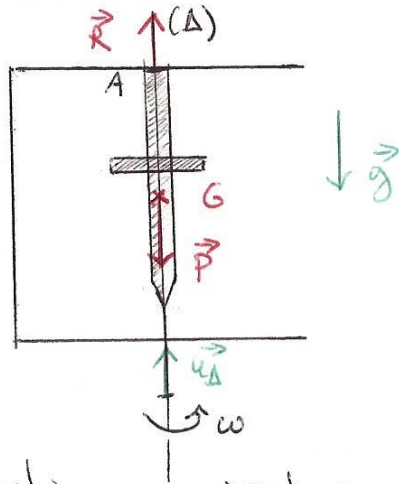
$$\|\vec{v}_A\| = l |\dot{\theta}| = \sqrt{3gl}$$

$$\|\vec{v}_G\| = \frac{l}{2} |\dot{\theta}| = \frac{1}{2} \sqrt{3gl} = \frac{1}{2} \|\vec{v}_A\|$$



Ex 2 : Étude d'une machine tournante.

On étudie l'outil de la machine dans le réf. du bâti supposé galiléen. L'outil tourne autour de l'axe orienté (Δ) , passant par le centre de gravité G de l'outil.



les actions s'exerçant sur le système sont :

- le poids en G
- la réaction du bâti, au pt de suspension A
- le couple moteur, de moment Γ_0 par rapport à Δ
- les forces de frottements de moment $M_\Delta = -k\omega$ par rapport à Δ .

TMC appliqué au système :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \underbrace{M_\Delta(\vec{P})}_{=0} + \underbrace{M_\Delta(\vec{R})}_{=0} + M_\Delta + \Gamma_0$$

car \vec{R} et $\vec{P} \parallel \Delta$ (A)

$$\Leftrightarrow J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = -k\omega + \Gamma_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\omega}{dt} + \frac{k}{J_\Delta} \omega = \frac{\Gamma_0}{J_\Delta} //$$

(2)

2) On introduit le temps caractéristique $\tau = \frac{J_\Delta}{k} //$. A $t=0$ on a $\omega=0$ et les frottements sont faibles : $\frac{d\omega}{dt} \approx \frac{\Gamma_0}{J_\Delta}$ et $\omega(t)$ croît linéairement. Les frottements deviennent de + en + importants, jusqu'à annuler l'effet du couple moteur :

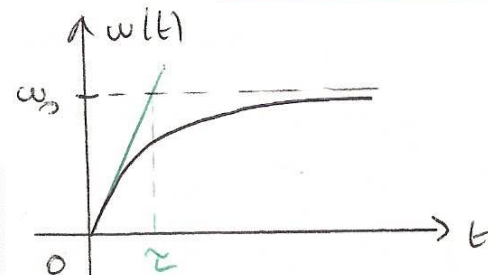
$$\frac{d\omega}{dt} \rightarrow 0 \quad \text{càd} \quad \omega \rightarrow \frac{\Gamma_0 \tau}{J_\Delta} = \omega_0 //$$

(vitesse limite)

À résoudre : $\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\omega_0}{\tau}$

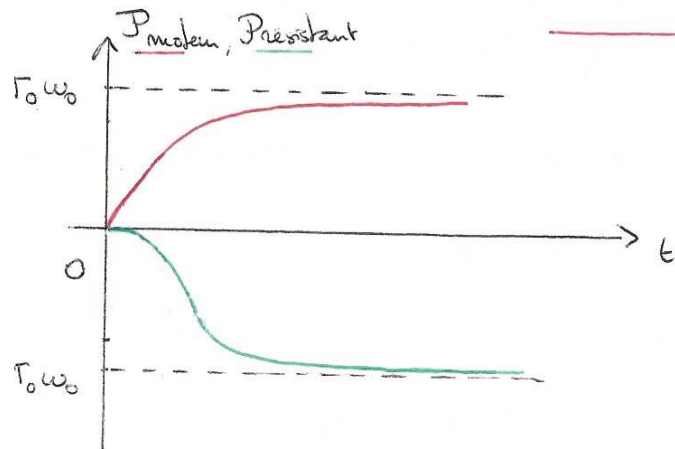
$$\omega(t) = A e^{-t/\tau} + \omega_0 \quad \text{et} \quad \omega(t=0) = 0$$

$$\text{soit} \quad \omega(t) = \omega_0 (1 - e^{-t/\tau}) //$$



$$3) \underline{P_{\text{moteur}}(t) = \Gamma_0 \omega(t) = \Gamma_0 \omega_0 (1 - e^{-t/\tau})} //$$

$$\begin{aligned} P_{\text{résistant}}(t) &= M_{\Delta} \omega(t) = -k \omega(t)^2 \\ &= -k \omega_0^2 (1 - e^{-t/\tau})^2 // \end{aligned}$$



$$Rq : \Gamma_0 \omega_0 = \frac{\omega_0^2 J_{\Delta}}{\tau}$$

$$k \omega_0^2 = \frac{\omega_0^2 J_{\Delta}}{\tau} = \Gamma_0 \omega_0$$

En régime permanent ($t \gg \tau$) : $P_{\text{moteur}} = -P_{\text{résistant}}$ //

(toute l'énergie fournie par le couple moteur est dissipée sous forme de frottements).

En régime transitoire ($t \ll \tau$) :

$$P_{\text{moteur}}(t) \approx \Gamma_0 \omega_0 \frac{t}{\tau}$$

$$P_{\text{résistant}}(t) \approx -\Gamma_0 \omega_0 \frac{t^2}{\tau^2}$$

ainsi : $|P_{\text{résistant}}(t)| < P_{\text{moteur}}(t)$

L'énergie est dissipée moins vite par les frottements qu'elle n'est fournie par le couple moteur, ce qui permet en pratique à l'outil d'accélérer au démarrage.

4) Dans l'éq° du mot on remplace Γ_0 par $\Gamma_0 (1 + \eta \cos(\Omega t))$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} = \frac{\Gamma_0}{J_{\Delta}} (1 + \eta \cos(\Omega t)) = \frac{\omega_0}{\tau} (1 + \eta \cos(\Omega t))$$

$$\text{Posons } \omega(t) = \omega_0 (1 + \varepsilon(t))$$

$$\text{alors } \frac{d\omega}{dt} = \omega_0 \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$$\Rightarrow \omega_0 \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\omega_0}{\tau} (1 + \varepsilon) = \frac{\omega_0}{\tau} (1 + \eta \cos(\Omega t))$$

$$\Leftrightarrow \underline{\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{\tau} = \frac{\eta}{\tau} \cos(\Omega t)} //$$
 (2)

À bout d'un certain temps (régime transitoire) le système est en régime sinusoïdal forcé. On cherche une solution de l'éq° (2) sous la forme : $\varepsilon(t) = E_m \cos(\Omega t + \varphi)$.

Passons en complexe : $\underline{\varepsilon} = \underline{E}_m e^{j\Omega t}$ et $\underline{E}_m = E_m e^{j\varphi}$

$$\frac{d\underline{\varepsilon}}{dt} + \frac{\underline{\varepsilon}}{\tau} = \frac{M}{\tau} e^{j\Omega t}$$

$$\Leftrightarrow j\Omega \cdot \underline{E}_m e^{j\Omega t} + \frac{\underline{E}_m e^{j\Omega t}}{\tau} = \frac{M}{\tau} e^{j\Omega t}$$

$$\Leftrightarrow \underline{E}_m = \frac{M/\tau}{1/\tau + j\Omega} = \frac{M}{1 + j\Omega\tau}$$

Finalement $E_m = |\underline{E}_m| = \frac{M}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}}$

et $\varphi = \text{Arg } \underline{E}_m = -\text{Arctan}(\Omega\tau)$

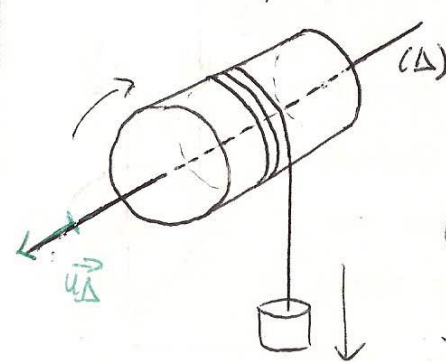
$$\varepsilon(t) = \frac{M}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}} \cos(\Omega t - \text{Arctan}(\Omega\tau))$$

6) L'outil agit comme un filtre ⁽³⁾ passe-bas mécanique de pulsation de coupe $\Omega_c = \frac{1}{\tau} = \frac{k}{J\Delta}$

L'intérêt du volant d'inertie est d'augmenter signifiquement $J\Delta$ et de réduire la fréquence de coupe c'est-à-dire d'atténuer même les vibrations de relativement basse fréquence. L'inconvénient est d'augmenter la durée du régime transitoire ($\tau = \frac{J\Delta}{k}$) et donc du démarrage de l'outil !

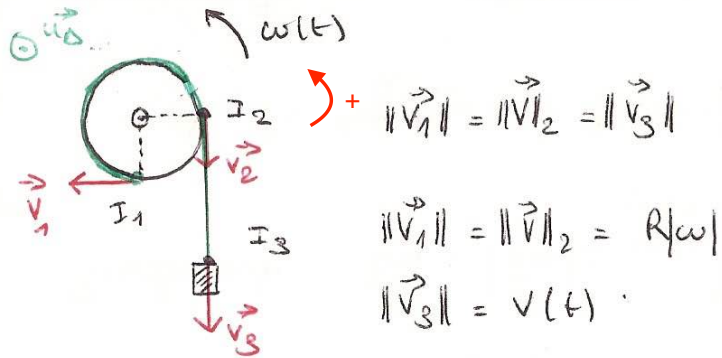
Ex 3. Mass suspendue à une poulie.

Devon en perspective.



Les flèches indiquent le sens réel du mouvement

1) La corde étant inextensible, et en appuyant en plus qu'elle ne glisse pas sur la poulie, tous les points de la corde ont la même vitesse, en norme.



$$\Rightarrow \underline{v(t) = R|\omega(t)|} = -R\omega(t) \quad //$$

Dans le mouvement étudié $\omega(t) < 0$!

2) Deux méthodes possibles

a) TEC $\rightarrow v(t) \rightarrow a(t)$

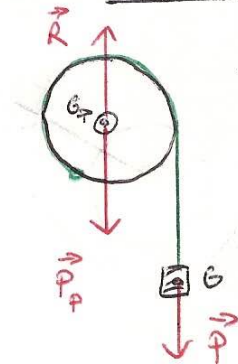
b) TMC $\rightarrow v(t) \rightarrow a(t)$
+ PFD

Il faut faire très attention au choix du système.

a) On applique le TEC au système

{ poulie + corde + masse } dans le réf. du labo supposé galiléen.

Bilan des forces ext :

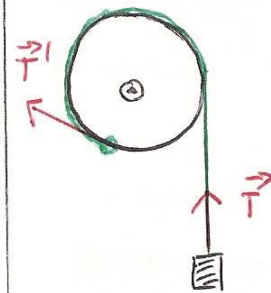


- Poids \vec{P}_p de la poulie exercé au centre de masse G_p de la poulie (sur l'axe (Δ))
- Poids \vec{P} de la masse exercé au centre de masse G
- Réaction \vec{R} de l'axe de rotation sur la poulie (empêche la chute de la poulie), exercé sur l'axe de rotation. On néglige toute force de frottement (liaison pivot parfaite).

Bilan des forces int :

- Tension \vec{T} du fil sur la poulie
- Tension \vec{T}' du fil sur la masse.

$$(Rq) \quad \|\vec{T}\| = \|\vec{T}'\|$$



\Rightarrow Le fil étant inextensible ces 2 forces ne travaillent pas !

TFC : $\frac{dE_c}{dt} = P_{ext} + \underbrace{P_{int}}_{=0}$

$$E_c = \frac{1}{2} m v(t)^2 + \frac{1}{2} J \omega(t)^2 = \frac{1}{2} \left(m + \frac{J}{R^2} \right) v(t)^2$$

$$P_{ext} = \underbrace{P(\vec{P}_e) + P(\vec{R})}_{=0 \text{ car poulie immobile } (v_{Gp} = \vec{0})} + \underbrace{P(\vec{P})}_{= \vec{P} \cdot \vec{v} = mgv(t)}$$

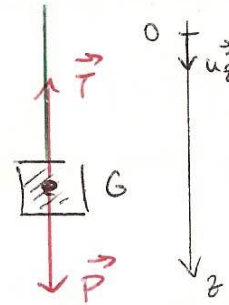
$$\left(m + \frac{J}{R^2} \right) v \frac{dv}{dt} = mgv$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = a(t) = \frac{mg}{m + \frac{J}{R^2}} = \frac{mg}{m + \frac{m_p}{2}}$$

$$a(t) = \frac{g}{1 + \frac{m_p}{2m}} //$$

Rq : si $m_p \ll m$, l'effet de la poulie est négligeable et $a(t) = g$ (chute libre).

b) On applique le PFD à la masse (uniquement). On reprend le bilan des forces ext. s'appliquant à la masse :

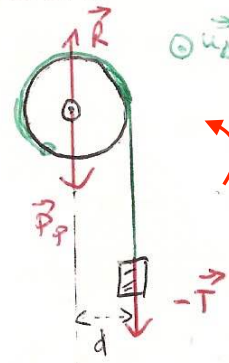


$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

$$m \frac{dv}{dt} \vec{u}_z = +mg \vec{u}_z - \|\vec{T}\| \vec{u}_z$$

$$\Leftrightarrow m \frac{dv}{dt} = +mg - \|\vec{T}\| \quad (1)$$

Il faut éliminer $\|\vec{T}\|$. Appliquons le TFC au système {poulie + corde} : les forces ext sont \vec{P}_p , \vec{R} et $-\vec{T}$ la tension exercée sur la corde.



$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \underbrace{M_\Delta(\vec{P}_p) + M_\Delta(\vec{R}) + M_\Delta(-\vec{T})}_{=0 \text{ car les forces passent par } \Delta}$$

$$L_\Delta = J_\Delta \omega \quad (\text{on néglige le moment d'inertie de la corde})$$

$$M_\Delta = -\|\vec{T}\| d = -\|\vec{T}\| R \quad \text{en utilisant le bras de levier } d.$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\|\vec{T}\| R \Leftrightarrow -\frac{J}{R^2} \frac{dv}{dt} = -\|\vec{T}\|$$

$$\Leftrightarrow \frac{J}{R^2} a(t) = +\|\vec{T}\| \quad (2)$$

On réinjecte dans (1) :

$$m a(t) = +mg - \frac{J}{R^2} a(t)$$

$$\Leftrightarrow a(t) = \frac{mg}{m + \frac{J}{R^2}} = \frac{g}{1 + \frac{M_p}{2m}} //$$

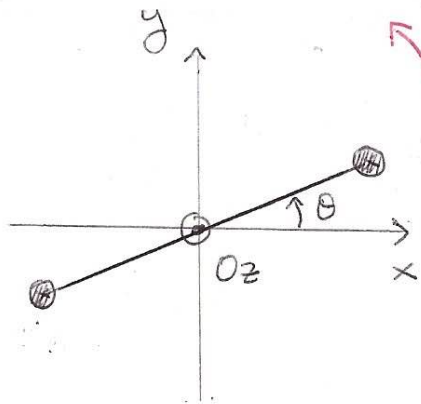
On retrouve bien la même expression.

Rq : on aurait pu choisir comme système la poulie uniquement et travailler avec la force extérieure \vec{T}' . Supposer que $\|\vec{T}'\| = \|\vec{T}\|$ revient à considérer que la masse de la corde est négligeable.

Ex 4 - Expérience de Cavendish.

1) Système : } tige + masses }

Référentiel : tenestre supposé galiléen.



vue du dessus.

Repère cartésien
(Oxyz) représenté sur
la figure. O est
confondu avec le
point d'attache du fil
de torsion. (Oz) est la
direction du fil.

Les angles sont orientés par la règle de
la main droite.

Bilan des actions.

- Poids et tension du fil dont les moments
par rapport à (Oz) sont nuls.

- Forces de torsion modélisées par un
couple de rappel de moment $\Gamma_r = -C\theta$
par rapport à (Oz).

On note J le moment d'inertie du
système. La tige est de masse
négligeable et on assimile les 2 masses
à des points matériels A et B.

$$\begin{aligned} \text{Alors } J &= (OA)^2 m + (OB)^2 m \\ &= \left(\frac{l}{2}\right)^2 m + \left(\frac{l}{2}\right)^2 m = \frac{1}{2} m l^2 \end{aligned}$$

On applique le TMC au système :

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) = \Gamma_r \Leftrightarrow J\ddot{\theta} + C\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J}\theta = 0 \quad //$$

Eq^o d'un OH de pulsation propre

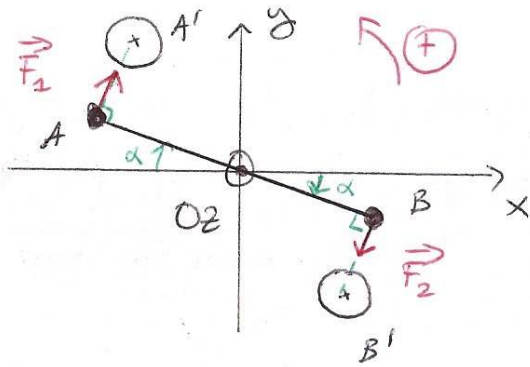
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$$

$$\theta(t) = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)$$

En tenant compte des C.I. $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$

$$\Rightarrow \underline{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)} \quad //$$

2)



$$\vec{F}_1 = -G \frac{MM}{(A'A)^3} \vec{A'A} = -G \frac{MM}{r^3} \frac{\vec{A'A}}{r}$$

$$\vec{F}_2 = -G \frac{MM}{(B'B)^3} \vec{B'B} = -G \frac{MM}{r^3} \frac{\vec{B'B}}{r}$$

Les boules A', B' étant approchées de manière symétrique on a : $\vec{A'A} = -\vec{B'B}$
donc $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

Les actions gravitationnelles \vec{F}_1 et \vec{F}_2 forment un couple. On note Γ_G leur moment par rapport à l'axe (Oz) .

$$\Gamma_G = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_2)$$

$$\text{avec } \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_1) = -\|\vec{F}_1\| OA = -\|\vec{F}_1\| \frac{\ell}{2}$$

$$\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_2) = -\|\vec{F}_2\| OB = -\|\vec{F}_2\| \frac{\ell}{2}$$

Fait tourner dans le sens indirect.

↳ bras de levier

$$\text{ou } \|\vec{F}_1\| = \|\vec{F}_2\| = \frac{GmM}{r^2}$$

$$\text{Alors } \Gamma_G = -\|\vec{F}_1\| \ell = -\frac{GmM}{r^2} \ell //$$

3) Le système est maintenant soumis en plus au couple des actions gravit.

$$\text{TMC : } \frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) = \Gamma_G + \Gamma_r$$

$$\text{à l'équilibre : } \dot{\theta} = 0 \Rightarrow 0 = \Gamma_G + \Gamma_r.$$

En posant α l'angle d'équilibre :

$$-\frac{GmM}{r^2} \ell - C\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{GmM\ell}{Cr^2} //$$

[Rq: $\alpha < 0$ (ok) vu l'orientation positive choisie. L'énoncé est ambigu car les angles ne sont pas orientés].

$$4) \text{ AN. } G = \frac{r^2 c |d|}{m M l}$$

$$= \frac{(0,216)^2 (6,00 \times 10^{-7}) (1,43 \times 10^{-3})}{60,0 \times 10^{-3} \times 40,0 \times 0,250}$$

$$= \underline{6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}} //$$

L'accélération de la pesanteur est donnée

par $g = \frac{G M_T}{R_T^2}$ avec R_T le rayon de la Terre.

Preons $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
 et $R_T = 6371 \times 10^3 \text{ m}$.

$$M_T = \frac{g R_T^2}{G} = \frac{9,81 \times (6,371 \times 10^6)^2}{6,67 \times 10^{-11}}$$

$$= \underline{5,97 \times 10^{24} \text{ kg.}} // \text{ (ok)}$$