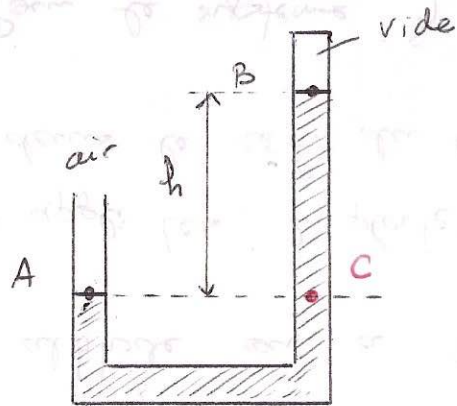


TD 23. Statique des fluides.

Ex 1 Baromètre



1) Relation barométrique :

$$P_C = P_B + \rho g h.$$

or $P_B = 0$ (car ... est vide au dessus de B).

(en réalité il y a une vapeur de mercure en équilibre à une pression P_{sat} très faible devant la pression atmosphérique).

De plus les points A et C sont à la même altitude donc $P_A = P_C$. ①

Finalement $P_A = \rho g h$.

$$h = \frac{P_A}{\rho g} \quad \text{A.N} \quad P_A = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$$
$$\rho = 13,6 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$
$$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\Rightarrow \underline{h = 76 \text{ cm.}}$$

[on retrouve l'unité de pression mmHg]

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}]$$

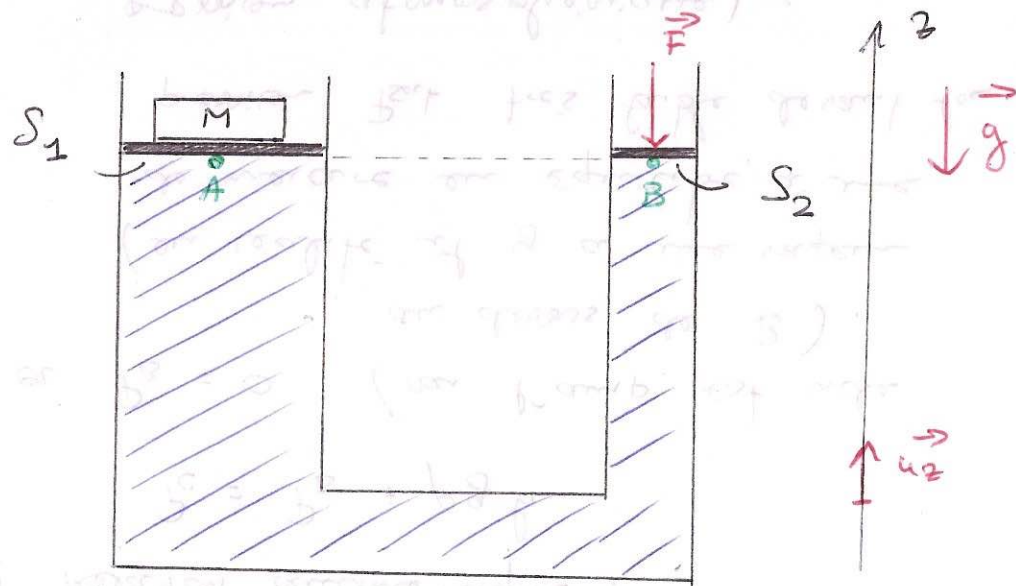
2) Avec de l'eau : $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

$$\underline{h = 10,3 \text{ m.}}$$

Le baromètre serait TRÈS encombrant !

Ex 2.

Verin hydraulique



Les points A et B étant à la même altitude on a $P_A = P_B$.

Les 2 plateformes sont à l'éq. dans le réf. du labo supposé galiléen.

Pour le système { plateforme de gauche + masse }

$$M\vec{g} + P_A S_1 \vec{u}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

(on néglige la masse de la plateforme)

Pour la plateforme de droite :

$$\vec{F} + P_B S_2 \vec{u}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow P_A = \frac{Mg}{S_1}$$

$$(2) \Rightarrow \vec{F} = -P_B S_2 \vec{u}_2$$

or $P_B = P_A$ donc $\vec{F} = -Mg \frac{S_2}{S_1} \vec{u}_2$ //

$$\|\vec{F}\| = Mg \frac{S_2}{S_1} //$$

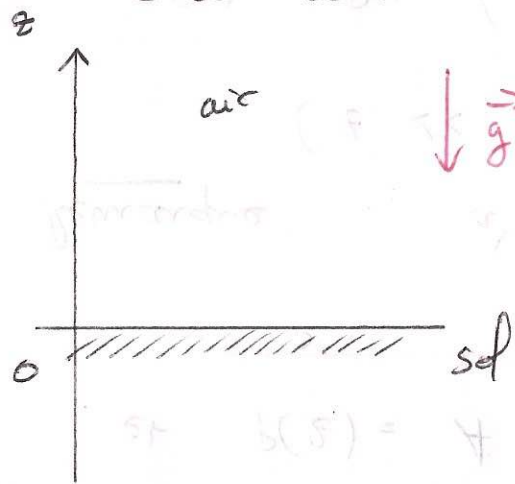
La force à appliquer est abaissée

d'un facteur $\frac{S_2}{S_1}$ (on a $S_2 < S_1$)

pour compenser le poids = Mg .

Ex 3 : Variations de pression dans la troposphère.

1) On reprend le cadre de l'étude de la pression dans l'atmosphère menée dans le cours. [^] assimilée à un GP.



Eq° de la statique des fluides :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g.$$

Eq° d'état du gaz parfait

$$\rho = \frac{MP}{RT} \quad \text{avec } M \text{ la masse molaire de l'air.}$$

$$\text{et } T = a - bz. \quad (2)$$

[Dans le cours on avait $b=0$
 $\Rightarrow T = a = T_0$].

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{R(a-bz)} P$$

La solution générale est de la forme

$$P(z) = A e^{-\int \frac{Mg}{R(a-bz)} dz}$$

où $\int \frac{Mg}{R(a-bz)} dz$ est une primitive de la fonction $\frac{Mg}{a-bz}$

$$\begin{aligned} \int \frac{Mg}{R(a-bz)} dz &= \frac{Mg}{R} \int \frac{1}{a-bz} dz \\ &= -\frac{Mg}{Rb} \ln(a-bz) + C \end{aligned}$$

On peut prendre $C = 0$

$$P(z) = A e^{\frac{Mg}{Rb} \ln(a-bz)}$$

$$= A (a-bz)^{Mg/Rb}$$

Posons $P(z=0) = P_{atm}$

alors $P_{atm} = a^{Mg/Rb} A$

et $P(z) = P_{atm} \left(1 - \frac{b}{a} z\right)^{Mg/Rb}$

Remarque : à basse altitude
($z \ll a/b$) ou a

$$P(z) \approx P_{atm} \left(1 - \frac{b}{a} z \frac{Mg}{Rb}\right)$$

$$= P_{atm} \left(1 - \frac{Mg}{Ra} z\right)$$

Pour le modèle de l'atm. barométrique

$$P(z) = P_{atm} e^{-\frac{Mg}{RT_0} z}$$

$$\Rightarrow z \ll \frac{RT_0}{Mg}$$

$$P(z) \approx P_{atm} \left(1 - \frac{Mg}{RT_0} z\right)$$

ici $a = T_0$ (température au sol
en $z=0$).

Les 2 modèles conduisent au même
résultat à basse altitude.

2) . A.N. $z = 4810 \text{ m}$.

$$\frac{P(z)}{P_{atm}} = \left(1 - \frac{6,5 \times 10^{-3}}{288} \times 4810\right)^{\frac{29 \times 10^{-3} \times 9,81}{8,31 \times 65 \times 10^{-3}}}$$

$$= 0,55$$

$\Rightarrow$ À cette altitude la pression est
environ la moitié de la pression
au niveau de la mer.

$$3) \quad \rho = \frac{M}{R} \frac{P}{T} = \frac{M}{Ra} P_{atm} \frac{(1 - \frac{bz}{a})^{Mg/Rb}}{1 - \frac{bz}{a}}$$

$$= \frac{MP_{atm}}{Ra} (1 - \frac{bz}{a})^{\frac{Mg}{Rb} - 1}$$

Posons $\alpha = \frac{Mg}{Rb}$

$$\rho^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \left(\frac{MP_{atm}}{Ra} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (1 - \frac{bz}{a})^{\alpha}$$

$$= \left(\frac{M}{Ra} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} P_{atm}^{\frac{\alpha}{\alpha-1} - 1} \underbrace{P_{atm} (1 - \frac{bz}{a})^{\alpha}}_{= P}$$

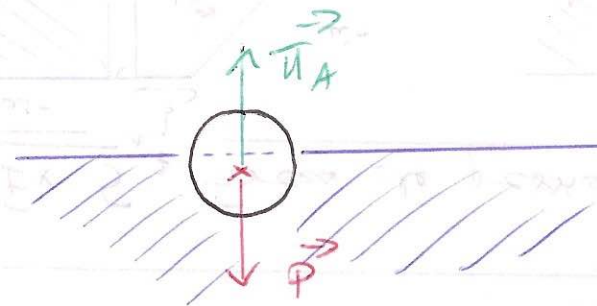
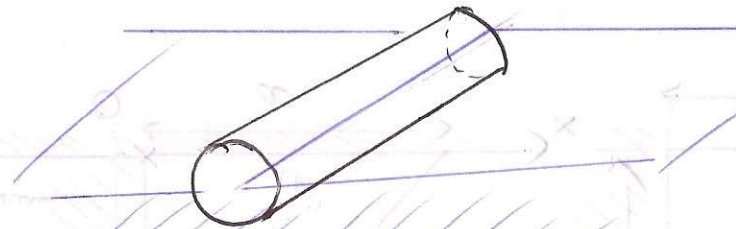
$$\Rightarrow \frac{P}{\rho^k} = \left(\frac{Ra}{M} \right)^k P_{atm}^{-\frac{1}{\alpha-1}} = \text{cte}$$

$$k = \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

L'atmosphère suit une loi polytropique !

Ex 4.

Partie immergée d'un tronc d'arbre.



Dans le ref. terrestre supp. galiléen, le tronc d'arbre est soumis à son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \rho_{\text{bois}} V \vec{g}$

et à la poussée d'Archimède :

$$\vec{\pi}_A = -\rho_{\text{eau}} V_i \vec{g} - \rho_{\text{air}} V_e \vec{g}$$

où V désigne le volume du tronc,
 V_i le volume immergé et $V_e = V - V_i$
 le volume émergé.

À l'équilibre : $\vec{P} + \vec{T}_A = \vec{0}$

donc $\rho_{\text{bois}} V - \rho_{\text{eau}} V_i - \rho_{\text{air}} (V - V_i) = 0$

$$\Rightarrow V_i = V \frac{\rho_{\text{bois}} - \rho_{\text{air}}}{\rho_{\text{eau}} - \rho_{\text{air}}}$$

or $\rho_{\text{eau}} = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

$\rho_{\text{bois}} = 0,42 \rho_{\text{eau}}$

et $\rho_{\text{air}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \ll \rho_{\text{eau}}, \rho_{\text{bois}}$

Finalement : $V_i = \frac{\rho_{\text{bois}}}{\rho_{\text{eau}}} V = 0,42 V$

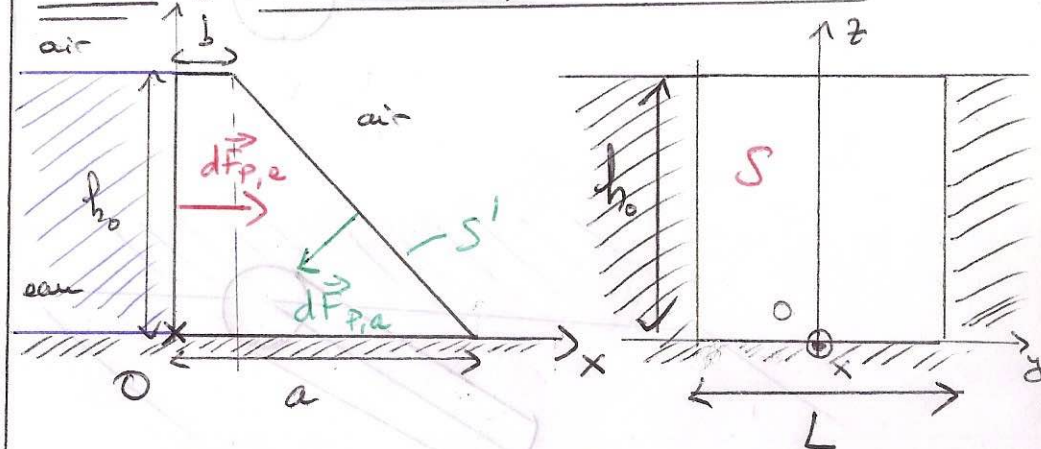
De plus $V = (\pi R^2) h$

avec $R = 30 \text{ cm}$ et $h = 10 \text{ m}$.

$$\Rightarrow V = \pi \times 0,3^2 \times 10 = 2,83 \text{ m}^3$$

$$V_i = 1,18 \text{ m}^3$$

Ex 5 Forces de pression sur un bauge



1) loi de l'hydrostatique :

$$P(z) = P_0 + \rho g (h_0 - z)$$

[En effet $\frac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow P(z) = -\rho g z + C$
 et $P(h_0) = P_0$ (pression atm.)
 $\Rightarrow C = P_0 + \rho g h_0$]

2) L'eau exerce une force de pression

$$\vec{F}_{P,e} = \int_{MES} d\vec{F}_{P,e}$$

$$= + \int_{MES} P(M) dS_M \vec{u}_x = F_{P,e} \vec{u}_x$$

avec $P(M) = P_0 + \rho g (h_0 - z)$

et $dS_M = dy dz$.

le batardeau est rectangulaire donc
 $z \in [0, h_0]$ et $y \in [-L/2, L/2]$

$$F_{P,e} = \int_{z=0}^{h_0} \int_{y=-L/2}^{L/2} [P_0 + \rho g (h_0 - z)] dy dz$$

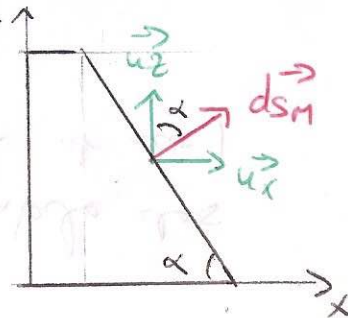
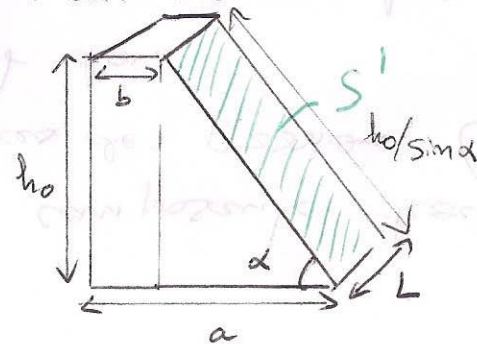
$$= \left(\int_{-L/2}^{L/2} dy \right) \left(\int_0^{h_0} (P_0 + \rho g (h_0 - z)) dz \right)$$

$$= L \left(P_0 h_0 + \rho g h_0^2 - \rho g \frac{h_0^2}{2} \right)$$

$$= P_0 L h_0 + \rho g \frac{h_0^2}{2} L$$

L'air exerce une force de pression $\vec{F}_{P,a} = - \int_{MES'} P(M) d\vec{S}_M$

sur la face extérieure.
 On peut négliger les variations de pression avec l'altitude dans l'air donc $P(M) = P_0$



$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{p,a,x} &= \vec{F}_{p,a} \cdot \vec{u}_x \\
 &= - \int_{M \in S'} p(M) dS_M \cdot \vec{u}_x \\
 &= - \int_{M \in S'} \underbrace{p(M)}_{=P_0} \sin(\alpha) dS_M \\
 &= - P_0 \sin(\alpha) \underbrace{\int_{M \in S'} dS_M}_{=S'} \\
 &= - P_0 \sin(\alpha) S'.
 \end{aligned}$$

or S' est un rectangle de cotés L et $\frac{h_0}{\sin \alpha}$ donc $S' = \frac{L h_0}{\sin \alpha}$

et $F_{p,a,x} = - P_0 L h_0$.

qui compense le terme correspondant dans $\vec{F}_{p,e}$.

La composante horizontale des forces de pression (eau et air) est donc :

$$F_{p,x} = + \rho g \frac{h_0^2}{2} L$$

3) La force verticale de pression est la composante verticale de $\vec{F}_{p,e}$.

$$\begin{aligned}
 F_{p,a,z} &= \vec{F}_{p,a} \cdot \vec{u}_z \\
 &= - P_0 \cos(\alpha) S' \\
 &= - P_0 \frac{L h_0}{\tan \alpha} \quad \tan \alpha = \frac{h_0}{a-b}
 \end{aligned}$$

Prendons $L = 100 \text{ m}$

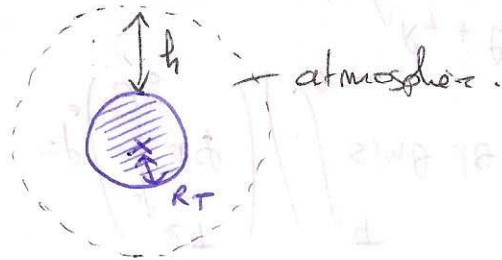
4) A.N.

$$\begin{aligned}
 F_{p,x} &= 10^3 \times 10 \times \frac{12^2}{2} \times 100 \\
 &= 7,2 \times 10^7 \text{ N.}
 \end{aligned}$$

$$|F_{p,a,z}| = 10^5 \times 100 \times \cancel{10} \times (15-4) = 1,1 \times 10^8 \text{ N.}$$

Ex 6. Masse de l'atmosphère.

La Terre est sphérique ! et l'atmosphère est une couronne



sphérique,
d'épaisseur h
(la "hauteur" de
l'atmosphère)

Déterminer la frontière de l'atmosphère est arbitraire car la densité de l'air varie continuellement avec l'altitude (pas de discontinuité, pas de frontière précise).

D'après le modèle de l'atmosphère isotherme la pression et donc la densité décroît exponentiellement.

$$p(z) = p_0 e^{-z/H} \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT_0}{Mg}$$

et $p(z) = \frac{MP}{RT_0}$

$$= \frac{MP_0}{RT_0} e^{-z/H}$$

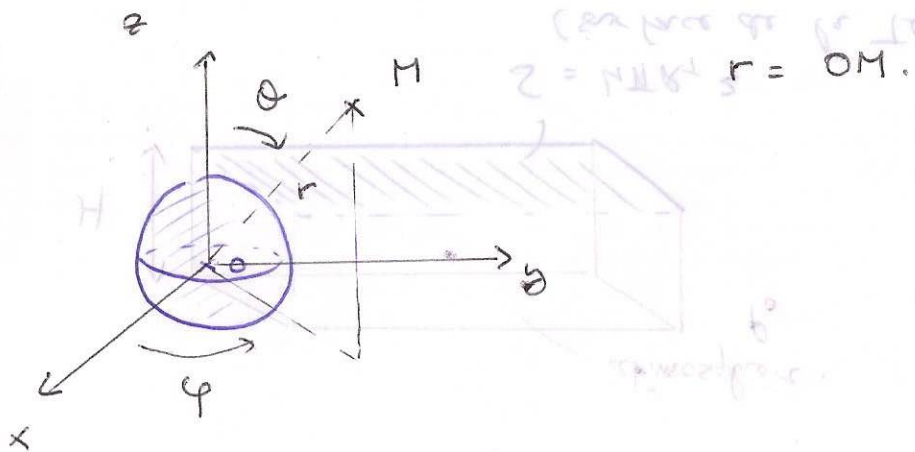
$$= p_0 e^{-z/H}$$

Pour $z = 5H$ la densité n'est plus qu'à 1% de sa valeur à la surface de la Terre. Pour $7H$, on a 0,1%.

Prenons (arbitrairement) $h = 7H$.
or $H = 8 \text{ km}$ donc $h \approx 60 \text{ km}$.

Pour déterminer la masse on intègre sur le volume V de l'atmosphère :

$$m = \int_{MEV} dm = \int_{MEV} \rho(M) dV(M)$$



Le système de coord. adapté est le syst. de coord. sphériques.

L'altitude z du pt M étant comptée à partir de la surface de la Terre on a

$$r = R_T + z \Rightarrow z = r - R_T.$$

Ainsi: $\rho(M) = \rho_0 e^{-(r-R_T)/H}$

et $dV(M) = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$

L'atmosphère est comprise entre les altitudes $z=0$ et $z=H$, soit

$$r = R_T \text{ et } r = R_T + H.$$

Alors $M = \int_{r=R_T}^{R_T+H} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_0 e^{-(r-R_T)/H} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$ (6)

$$= \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \right)}_{=2} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right)}_{=2\pi} \underbrace{\left(\int_{R_T}^{R_T+H} \rho_0 r^2 e^{-(r-R_T)/H} \, dr \right)}_{= \rho_0 I}$$

$I = \int_{R_T}^{R_T+H} r^2 e^{-(r-R_T)/H} \, dr$... voir aussi "Wolfram alpha" ... que l'on intègre par parties ... 2 fois!

$$I = \left[r^2 (-H) e^{-(r-R_T)/H} \right]_{R_T}^{R_T+H} + 2H \int_{R_T}^{R_T+H} r e^{-(r-R_T)/H} \, dr$$

$$= -H(R_T+H)^2 e^{-H/H} + HR_T^2 + 2H J$$

$$J = \left[r(-H) e^{-(r-R_T)/H} \right]_{R_T}^{R_T+H} + H \int_{R_T}^{R_T+H} e^{-(r-R_T)/H} \, dr$$

$$= -H(R_T+H) e^{-H/H} + R_T H - H^2 e^{-H/H} + H^2$$

$$I = e^{-H/H} \left(-H(R_T+H)^2 - 2H^2(R_T+H) - 2H^3 \right) + HR_T^2 + 2R_T H^2 + 2H^3$$

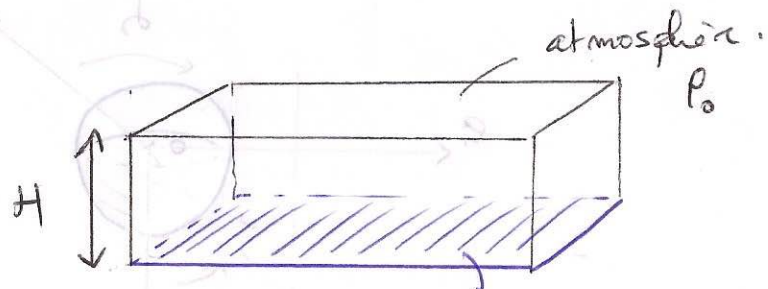
$$\text{or } e^{-h/H} \ll 1 \text{ et } R_T \gg H$$

$$\text{donc } I \simeq H R_T^2$$

$$\text{et } m \simeq (4\pi R_T^2 H) \rho_0$$

Rq: $4\pi R_T^2$ est la surface de la Terre!

Ainsi: m correspond à la masse d'un fluide homogène de masse volumique ρ_0 , en forme de parallélépipède de base $S = 4\pi R_T^2$ et de hauteur H .



$$S = 4\pi R_T^2$$

(surface de la Terre)

Avec un peu d'expérience on peut arriver à ce résultat en inspectant l'intégrale:

$$m = 4\pi \rho_0 \int_{R_T}^{R_T+H} r^2 e^{-(r-R_T)/H} dr.$$

L'intégrale est dominée par les valeurs de r telles que $r - R_T < H \Leftrightarrow r < R_T + H$.

En négligeant les variations de l'intégrande sur cet intervalle on aurait:

$$m \simeq 4\pi \rho_0 \int_{R_T}^{R_T+H} R_T^2 dr$$

$$= 4\pi \rho_0 R_T^2 H.$$

~~$$= 4\pi \rho_0 \left(\frac{1}{2} (R_T+H)^2 - \frac{1}{2} R_T^2 \right) = 4\pi \rho_0 \left(R_T H + \frac{1}{2} H^2 \right)$$

$$= 4\pi \rho_0 R_T H + 2\pi \rho_0 H^2$$~~