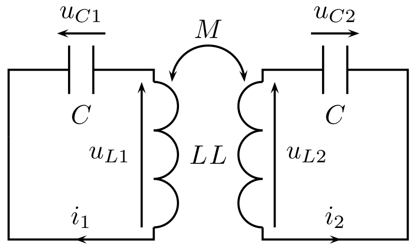
Travaux dirigés **PCSI 1**

Feuille d'exercices n° 27 : Corrigé

1 Circuits couplés par mutuelle

1. Si les circuits sont couplés, alors des lignes du champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$, créé par i_1, traversent le circuit 2 ; de même, celle de $\overrightarrow{B_2}$, créé par i_2, traversent le circuit 1.



2. Les tensions doivent être dessinées en convention récepteur.
La loi des mailles dans le circuit 1 impose $u_{L1} + u_{C1} = 0$. De plus, $u_{L1} = L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$, $i_1 = C\frac{du_{C1}}{dt}$ et $i_2 = C\frac{du_{C2}}{dt}$.
Ainsi : $LC\frac{d^2u_{C1}}{dt^2} + MC\frac{d^2u_{C2}}{dt^2} + u_{C1} = 0$.
De même avec la maille 2 : $LC\frac{d^2u_{C2}}{dt^2} + MC\frac{d^2u_{C1}}{dt^2} + u_{C2} = 0$.

3. Sommons ces deux équations : $C\left(L+M\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(u_{C1}+u_{C2}\right)+\left(u_{C1}+u_{C2}\right) = 0$ soit $\frac{1}{\omega_1^2}\frac{d^2\sigma}{dt^2}+\sigma = 0$, qui s'intègre en : $\sigma\left(t\right) = \sigma_0\cos\left(\omega_1 t\right) + \sigma_0'\sin\left(\omega_1 t\right)$.

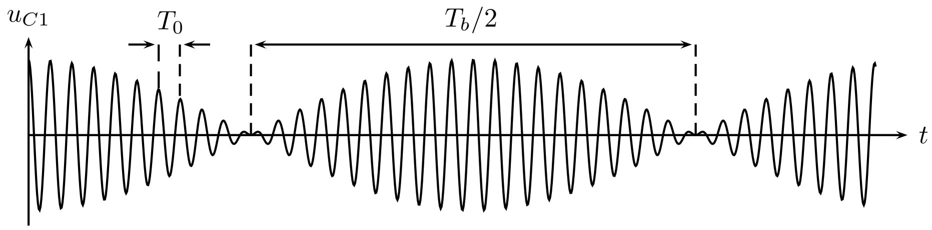
Et pour la différence : $C\left(L-M\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(u_{C1}-u_{C2}\right)+\left(u_{C1}-u_{C2}\right) = 0$ soit $\frac{1}{\omega_2^2}\frac{d^2\delta}{dt^2}+\delta = 0$, qui s'intègre en : $\delta\left(t\right) = \delta_0\cos\left(\omega_2 t\right) + \delta_0'\sin\left(\omega_2 t\right)$.

Les tensions aux bornes des condensateurs sont continues donc les conditions initiales sont $u_{C1}\left(0\right) = u_0$ et $u_{C2}\left(0\right) = 0$. Ainsi : $\sigma_0 = \delta_0 = u_0$.

Les intensités des courants qui traversent les bobines sont continues donc les conditions initiales sont $\left.\frac{du_{C1}}{dt}\right)_0 = \frac{i_1(0)}{C} = 0$ et $\left.\frac{du_{C2}}{dt}\right)_0 = \frac{i_2(0)}{C} = 0$. Ainsi : $\sigma_0' = \delta_0' = 0$. Finalement :

$$u_{C1}\left(t\right) = \frac{\sigma\left(t\right)+\delta\left(t\right)}{2} = \frac{u_0}{2}\left(\cos\left(\omega_1 t\right)+\cos\left(\omega_2 t\right)\right) \quad \text{et} \quad u_{C2}\left(t\right) = \frac{\sigma\left(t\right)-\delta\left(t\right)}{2} = \frac{u_0}{2}\left(\cos\left(\omega_1 t\right)-\cos\left(\omega_2 t\right)\right). \tag{1}$$

4. Si $M \ll L$ alors $\omega_1 \approx \omega_2$. Le signal u_{C1} est la somme de deux signaux sinusoïdaux de pulsations proches, on observe des battements :



5. $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et : $\omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{C\left(L+M\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{LC\left(1+\frac{M}{L}\right)}} = \omega_0\left(1+\dfrac{M}{L}\right)^{-1/2} = \omega_0\left(1-\dfrac{M}{2L}+o\left(\dfrac{M}{L}\right)\right)$.

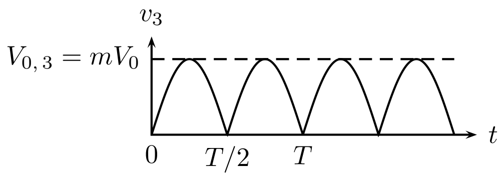
Au premier ordre en $\frac{M}{L}$, $\omega_1 = \omega_0\left(1-\frac{M}{2L}\right)$. De même, au premier ordre en $\frac{M}{L}$, $\omega_2 = \omega_0\left(1+\frac{M}{2L}\right)$. Et la tension u_{C1} devient :

$$u_{C1}\left(t\right) = \frac{u_0}{2}\left(\cos\left(\omega_1 t\right)+\cos\left(\omega_2 t\right)\right) = u_0\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right) = u_0\cos\left(\omega_0 t\right)\cos\left(-\omega_0\frac{M}{2L}t\right). \tag{2}$$

Le second cosinus a une pulsation $\omega_b = \omega_0\frac{M}{2L}$ beaucoup plus faible que ω_0. On lit sur le graphe les valeurs de $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et $T_b = \frac{2\pi}{\omega_b}$. On en déduit $\frac{M}{L} = \frac{2T_0}{T_b}$.

2 Dimensionnement d'un transformateur

1. $V_{0,\,2} = mV_0$.
2. $v_3\left(t\right)$ est la valeur absolue de $v_2\left(t\right) = mV_0\sin\left(2\pi f t\right)$:
3. Le signal de tension v_3, de période $T/2$, est composé d'une valeur moyenne, à conserver, d'un fondamental à la pulsation $\omega_1 = \frac{2\pi}{\text{période}} = \frac{4\pi}{T} = 4\pi f_0$ et d'harmoniques de pulsations multiples entières du fondamental, $\omega_n = n\omega_1$.



Pour ne garder que la valeur moyenne, il faut filtrer les hautes fréquences. On utilise donc un passe-bas de fréquence de coupure très inférieure à $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 2f_0 = 100$ Hz, par exemple inférieure à 10 Hz.

4. Calculons sur une période la valeur moyenne du signal v_3, de période $T/2$ (d'où le $1/\text{période} = 2/T$ en début de formule) :

$$\langle v_3 \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} mV_0 \sin(2\pi f_0 t)\,\mathrm{d}t = \frac{2mV_0}{T} \left[-\frac{\cos(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0} \right]_0^{T/2} = \frac{2mV_0}{\pi} = v_4. \tag{3}$$

5. $m = \frac{\pi v_4}{2V_0} = 7,8.10^{-2} < 1$, il y a plus de spires au primaire qu'au secondaire.

3 Table à induction (d'après CCP)

1. $\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \underline{v}_1 = (R_1 + iL_1\omega)\,\underline{i}_1 + iM\omega\underline{i}_2 \\ 0 = (R_2 + iL_2\omega)\,\underline{i}_2 + iM\omega\underline{i}_1 \end{cases}$ donc $\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\frac{iM\omega}{R_2 + iL_2\omega}$.

3. $\underline{v}_1 = (R_1 + iL_1\omega)\,\underline{i}_1 + iM\omega\left(-\frac{iM\omega}{R_2+iL_2\omega}\underline{i}_1\right)$, donc $\underline{Z}_e = R_1 + iL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{R_2+iL_2\omega}$.

4. A.N. avec $\omega = 2\pi f$ et $f = 25\,\text{kHz}$.

$\begin{cases} R_1 \ll L_1\omega \\ R_2 \ll L_2\omega \end{cases}$ donc $\begin{cases} \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\frac{M}{L_2} \\ \underline{Z}_e = iL_1\omega\left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right) \end{cases}$ donc $\begin{cases} \frac{I_2}{I_1} = -8,3 \\ |Z_e| = 2,1\,\Omega \end{cases}$

5. Le champ magnétique, créé par l'inducteur et vu par la plaque, diminue lorsqu'on éloigne la plaque. Le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers la plaque diminue et donc M diminue. Alors Z_e augmente et, pour une même tension d'alimentation, le courant décroît.