Feuille n° 18 : Mécanique quantique

Ex. 2

Dans tout l'exercice il faut commencer par évaluer la qté de mouvement des particules en question.

1) Supposons que les neutrons sont non-relativistes, alors $E_c = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{} = \frac{3}{2} k_B T$

$$= \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{3 m k_B T}$$

et $\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{3 m k_B T}}$ (On parle de longueur d'onde de de Broglie thermique).

A.N. $\lambda_{DB} = 1{,}5 \times 10^{-10}$ m

(Rq : $v = \frac{p}{m} = 2{,}7 \times 10^3$ m.s^{-1})

2) On nous donne la vitesse v (et $v \ll c$, non-relativiste)

$$\begin{cases} p = m(C_{60})\, v \\ m(C_{60}) = \frac{60\, M_C}{\mathcal{N}_A} \simeq 60 \times \underbrace{12}_{} m_p = 1{,}2 \times 10^{-24} \text{ kg} \end{cases}$$

12 nucléons dans 1 atome de ^{12}C.

$\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = 2{,}5 \times 10^{-12}$ m

3) Imaginons une personne de masse $m = 70$ kg marchant à la vitesse $v = 2$ m.s^{-1}

$p = mv = 140$ kg.m.s^{-1}

$\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = 5 \times 10^{-36}$ m ! $\ll 1$ m.

En traversant une porte de largeur $a \simeq 1$m, la fonction d'onde associée à la personne n'est pas diffractée (ou très peu)

$\Rightarrow$ La trajectoire classique sera une excellente approximation du mouvement.

Ex. 3 Microscopie électronique

Même stratégie. On cherche d'abord à calculer p pour utiliser $\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$.

Ici $p = \gamma m v$ et γ dépend de v.

Il est risqué de calculer directement v en utilisant $c = 3.10^8$ m.s^{-1}, car on pourrait trouver une valeur de v, certes plus petite que 3.10^8 m.s^{-1} mais plus grande que la valeur exacte !

Calculons alors $\beta = \frac{v}{c}$

$$E_c = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) m_e c^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta^2 = \frac{-1}{\left(1 + \frac{E_c}{m_e c^2}\right)^2} + 1$$

A.N. L'idéal serait d'utiliser la valeur tabulée de $m_e c^2$ en eV, càd $m_e c^2 = 511$ keV

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{100}{511}\right)^2} = 0{,}30 \Rightarrow \underline{\beta = 0{,}55} \; //$$

Si on ne nous la donne pas ; utilisons $c = 3 \times 10^8$ m.s^{-1} et $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg.

$m_e c^2 = 511$ keV (en ne gardant que 3CS on retrouve la valeur tabulée).

$\underline{\beta = 0{,}55}$ //

$$\Rightarrow \underline{v = \beta c = 1{,}65 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}} \; //$$

$$p = \gamma m_e v$$

A.N. $p = 1{,}8 \times 10^{-22}$ kg.m.s^{-1}.

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}}{1{,}8 \times 10^{-22}} = \underline{3{,}7 \times 10^{-12} \text{ m}} \; //$$

$\lambda_{DB} \ll a = 10^{-10}$ m la distance interatomique typique

Ce microscope électronique sera moins affecté par la diffraction.

Ex. 1 Observations d'étoiles.

1) Soit $P = 500$ W.m^{-2} la puissance surfacique au niveau du sol.

On calcule l'énergie totale E reçue par l'oeil pendant $\Delta t = 1$ s.

$E = f P S \Delta t$ avec S la surface de la pupille.

et $f = 10^{-5}$ le coeff d'atténuation du filtre.

$S = \pi (d/2)^2$ avec d le diamètre de la pupille.

Prenons $d = 2$ mm (pupille contractée au max).

A.N. $S = 3,1 \times 10^{-6}\ m^2$

$E = 1,6 \times 10^{-5}\ J$

le nombre de photons reçus N vaut :

$$N = \frac{E}{h\nu} = \frac{E\lambda}{hc}$$

avec λ la longueur d'onde typique d'un photon reçu du soleil.

Prenons $\lambda \simeq 550\ nm$ (jaune) (correspond environ au max de l'intensité lumineuse).

A.N $N = 4 \times 10^{10}$ photons. //

2) En supposant la pupille complètement dilatée :

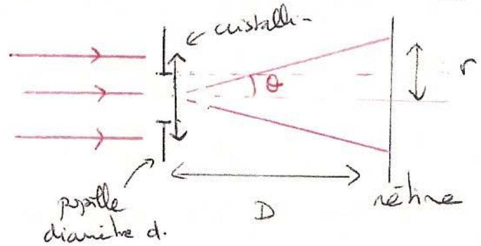
$d = 6\ mm$ et $S = \pi \left(d/2\right)^2 = 2,8 \times 10^{-5}\ m^2$

$$N = \frac{PS\Delta t}{h\nu} = \frac{PS\Delta t}{hc}\lambda$$

En prenant $P = 10^{-14}\ W.cm^{-2} = 10^{-10}\ W.m^{-2}$

$N = 8 \times 10^3$ photons //

3) cherchons le nombre de cellules de la rétine éclairées par l'image d'une étoile sur la rétine. En supposant l'étoile ponctuelle on peut supposer que c'est la diffraction par la pupille qui détermine la taille de l'image.



$$r = \frac{\lambda D}{d}$$

A.N $$r = \frac{550 \times 10^{-9} \times 0,017}{0,006} = 1,6\ \mu m$$

La taille d'une cellule de la rétine est de l'ordre de $2\ \mu m$. Toute la lumière semble converger vers une seule cellule qui reçoit environ 1000 photons par 0,1 s, largement assez pour une perception continue de la lumière.

Exo 4 : Effet Compton.

1) $E = h\nu = hc/\lambda$

A.N. $E = \dfrac{6,62 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^{8}}{0,022 \times 10^{-10}}$

$= 9,03 \times 10^{-14}\ J = \underline{564\ keV}$ .//

L'énergie d'un photon γ est de l'ordre de l'énergie de masse de l'électron. Les effets relativistes ne pourront être négligés pendant la collision.

2) La formule de la diffusion Compton s'écrit $\lambda' = \lambda + \dfrac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$

$= \lambda + \dfrac{2h}{m_e c}\sin^2(\theta/2)$

A.N. $\lambda = 0,022\ \mathring{A}$

et $\dfrac{2h}{m_e c} = 4,85 \times 10^{-12}\ m = 0,0485\ \mathring{A}$

Ainsi $\underline{\lambda' = 0,022 + 0,0485 \sin^2(\theta/2)}$ avec λ' en $\mathring{A}$ //

3) $\underline{E = h\nu}$ // et $\vec{p} = \dfrac{h}{\lambda}\underline{\vec{u}}$ //

avec $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ la fréquence de l'onde électromagnétique (et λ sa longueur d'onde) et $\vec{u}$ le vecteur unitaire indiquant sa direction de propagation.

$$\underline{p = \|\vec{p}\| = \frac{h\nu}{c} = \frac{E}{c}} \;//$$

Pour une particule relativiste de masse m :

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}.$$

Pour un photon, $\underline{m = 0}$ et on trouve bien $\underline{E = pc}$ /

$p = h/\lambda$

Le système étudié est l'ensemble {photon + électron}

Le système étant isolé, sa qté de mouvement $\vec{p}_{tot}$ et son énergie E_{tot} sont conservées.

Avant la collision : $E_{tot} = E_e + E$ (énergie e⁻ : E_e ; énergie photon : E)

après : $E_{tot} = E_e' + E'$

$$\Rightarrow E_e + E = E'_e + E'$$

Idem pour la qté de mvt : $\underbrace{\vec{p} + \vec{p}_e}_{\text{avant la collision}} = \underbrace{\vec{p}\,' + \vec{p}\,'_e}_{\text{après la collision}}$

Simplifions les équations.

Avant la collision, l'électron est au repos : $\vec{p}_e = \vec{0}$

et $E_e = m_e c^2$

On cherche à faire apparaître $\vec{p}\cdot\vec{p}\,' = pp'\cos\theta$

On a $\underbrace{\vec{p} + \vec{p}_e}_{=\vec{0}} = \vec{p}\,' + \vec{p}\,'_e \Rightarrow \vec{p} - \vec{p}\,' = \vec{p}\,'_e$

$$\Rightarrow (\vec{p} - \vec{p}\,')^2 = (\vec{p}\,'_e)^2 \Leftrightarrow \vec{p}^{\,2} + \vec{p}\,'^2 - 2\vec{p}\cdot\vec{p}\,' = (\vec{p}\,'_e)^2$$

$$\Leftrightarrow h^2\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\theta\right) = (p'_e)^2 \quad (a)$$

or $E + m_e c^2 = E'_e + E'$

$$\Leftrightarrow E'_e = E - E' + m_e c^2$$

$$\Rightarrow (E'_e)^2 = (E - E' + m_e c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{m_e^2 c^4} + (\vec{p}\,'_e)^2 c^2 = (E - E')^2 + \cancel{m_e^2 c^4} + 2m_e c^2(E - E')$$

$$\Leftrightarrow (\vec{p}\,'_e)^2 = \frac{E^2}{c^2} + \frac{E'^2}{c^2} - \frac{2EE'}{c^2} + 2m_e \cancel{c^2}\left(\frac{E}{c^2} - \frac{E'}{c^2}\right) \quad (b)$$

On utilise $E = \quad$, $E' = \quad$ et on réinjecte ds (a) :

$$\cancel{\frac{h^2}{\lambda^2}} + \cancel{\frac{h^2}{\lambda'^2}} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta = \cancel{\frac{h^2}{\lambda^2}} + \cancel{\frac{h^2}{\lambda'^2}} - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'} + 2m_e c^2\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)h$$

$$\frac{2h^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\theta) = 2m_e c^2\left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}\right)h \Rightarrow \boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)}$$