TD 29
Introduction au monde quantique

✎ Application directe du cours ✪ Exercice incontournable ➪ Pour approfondir ou réviser.

Ex. 5 Durée de vie d'un état circulaire dans un atome de Rydberg ➪

1. L'électron décrit un mouvement à force centrale autour du noyau d'hydrogène. Le mouvement est plan, et dans la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, la force d'attraction coulombienne s'écrit :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{k}{r^2}\overrightarrow{u_r} \quad \text{avec} \quad k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Sur une orbite circulaire de rayon r_n le principe fondamental de la dynamique projeté sur le vecteur $\overrightarrow{u_r}$ donne :

$$m_e\frac{v_n^2}{r_n} = \frac{k}{r_n^2},$$

avec $v_n = r_n\omega_{c,n} = r_n\frac{2\pi}{T_{c,n}}$ la vitesse de l'électron. On en déduit :

$$\boxed{T_{c,n} = \sqrt{\frac{4\pi^2 m_e}{k}r_n^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2 m_e}{k}a_0^3 n^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_{c,n} = \frac{2\pi}{T_{c,n}} = \sqrt{\frac{k}{m_e r_n^3}} = \sqrt{\frac{k}{m_e a_0^3}}\frac{1}{n^3}.}$$

2. L'énergie E_n du niveau atomique de nombre quantique n est donnée par la formule $E_n = \frac{E_1}{n^2}$ avec $E_1 = -\frac{k^2 m_e}{2\hbar^2}$ l'énergie de l'état fondamental. La transition électronique entre les niveaux n et $n-1$ s'accompagne de l'émission d'un photon d'énergie $E = E_n - E_{n-1}$ soit

$$E = E_1\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \frac{E_1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{(1-1/n)^2}\right) \simeq -\frac{2E_1}{n^3}, \quad \text{si} \quad n \gg 1.$$

D'après la relation de Planck-Enstein $E = \hbar\omega_{n\to n-1}$, la pulsation du photon émis est donnée par $\omega_{n\to n-1} = -\frac{2E_1}{\hbar n^3}$. En exprimant le rayon de Bohr sous la forme $a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k}$ on trouve $\omega_{c,n} = \frac{k^2 m_e}{\hbar^3}\frac{1}{n^3} = -\frac{2E_1}{\hbar n^3} \Rightarrow$ $\boxed{\omega_{n\to n-1} = \omega_{c,n}.}$ Dans la limite des grands nombres quantiques, la pulsation du photon émis lors de la transition $n \to n-1$ coïncide avec la pulsation classique du mouvement de l'électron sur l'orbite de rayon $r_n = n^2 a_0$.

3. On utilise le principe de correspondance pour relier la puissance quantique $\mathcal{P}_q$ à la formule de Larmor : dans la limite $n \gg 1$, $\mathcal{P}_q = \mathcal{P}_c$. Sur l'orbite classique de rayon $r_n = n^2 a_0$ l'accélération de l'électron est donnée par $a = \frac{k}{m_e r_n^2}$ donc

$$\mathcal{P}_c = \frac{e^2k^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3 m_e^2 a_0^4 n^8} = \frac{2k^3}{3c^3 m_e^2 a_0^4 n^8}.$$

De plus, dans la limite $n \gg 1$,

$$\mathcal{P}_q = A_{n\to n-1}\hbar\omega_{c,n} = A_{n\to n-1}\frac{k^2 m_e}{\hbar^2}\frac{1}{n^3}.$$

On en déduit

$$\boxed{A_{n\to n-1} = \frac{2k^5 m_e}{3\hbar^6 c^3 n^5}.}$$

4. D'après la formule donnant la puissance $\mathcal{P}_q$, l'unité du taux d'émission $A_{n\to n-1}$ est s^{-1} : le taux d'émission s'interprète comme le nombre moyen de photons émis par seconde par une transition $n \to n-1$. On en déduit le temps de vie du niveau n : $\tau_n = 1/A_{n\to n-1}$. Pour $n = 50$ on trouve $A_{n\to n-1} = 34\,\mathrm{s}^{-1}$ et $\boxed{\tau_n = 30\,\mathrm{ms}}$.