TD 1
Éléments de correction

Ex. 1 Homogénéité

Les seules expressions plausibles sont : **1.** $\boxed{x = \dfrac{v^2 \sin 2\alpha}{g}}$ et **2.** $\boxed{f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}}$.

Ex. 2 Applications numériques et chiffres significatifs

1. $a = 2{,}75\,\mathrm{m}$. La surface vaut $\boxed{a = 7{,}56\,\mathrm{m}^2}$ (en ne gardant que trois chiffres significatifs).

2. Soit V le volume d'eau dans la piscine, $V = L \times \ell \times h = 9{,}4 \times 10^2\,\mathrm{m}^3 = \boxed{9{,}4 \times 10^5\,\mathrm{L}}$. La notation en puissance de 10 permet d'afficher sans ambiguïté le bon nombre de chiffres significatifs. On pourrait être tenter d'écrire $940\,\mathrm{m}^3$, mais on aurait 3 chiffres significatifs, ce qui est un de plus que h qui n'en a que deux. **À savoir absolument :** $1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{L}$ **ou** $1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{dm}^3$**.**

3. La longueur L de la piste est $L = (100,00 \pm 0,01)$ m (connue au cm près). La durée de la course est $\tau = 9{,}81\,\mathrm{s}$. La vitesse moyenne est $v = L/\tau = \boxed{10{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 36{,}7\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}$, en ne gardant que 3 chiffres significatifs. **Remarque :** $1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = \mathbf{(10^{-3}\ km).(\frac{1}{3600}\ h)^{-1}} = 3{,}6\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$**.**

Ex. 3 Unités

1. [force] = [masse] $\times$ [acceleration] $= M.L.T^{-2}$. On en déduit que $\boxed{1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}}$.

2. L'expression de l'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, soit [énergie] = [masse] $\times$ [vitesse]^2 $= M.L^2.T^{-2}$. On en déduit que $\boxed{1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}}$.

3. [puissance] = [énergie]/[temps] $= M.L^2.T^{-3}$, soit $\boxed{1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}}}$.

De plus [tension] = [puissance]/[intensité] $= M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$, soit $\boxed{1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{W{\cdot}A^{-1}} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-3}{\cdot}A^{-1}}}$.

Ex. 4 Troisième loi de Kepler

1. $[k] = T^2.L^{-3}$.

2. On a [force] $= M.L.T^{-2}$. On en déduit $[G] = [\text{force}] \times L^2/(M^2) = M^{-1}.L^3.T^{-2}$. On pose $k = \kappa G^\alpha M_\odot^\beta$ avec κ une constante sans dimension. La relation est homogène ssi $\alpha = -1$ et $\beta = -1$, soit $\boxed{k = \dfrac{\kappa}{MG}}$.

3. On peut calculer le rapport T^2/a^3 et vérifier qu'il est à peu près constant pour tous les couples donnés. La moyenne des valeurs obtenues donnent : $k = 3{,}978 \times 10^{-20}\,\mathrm{jour^2{\cdot}km^{-3}}$. On en déduit pour la Terre $\boxed{a = 149{,}7 \times 10^6\,\mathrm{km}}$, à comparer avec la valeur tabulée $a = 149{,}6 \times 10^6\,\mathrm{km}$.

Ex. 5 Calcul d'ordres de grandeur

1. Soit N_s le nombre de secondes dans une année. $N_s = 365,25 \times 24 \times 3600 \approx 400 \times 20 \times 4000 = 4 \times 4 \times 2 \times 10^6 \approx 3 \times 10^7$ s.

2. Soit d_{TL} et d_{TS} les distances Terre-Lune et Terre-Soleil. d_{TL} est la distance parcourue par la lumière (vitesse $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$) en $1{,}28\,\mathrm{s}$. Soit $d_{\mathrm{TL}} = 3 \times 10^8 \times 1,28 \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m} = 300\,000\,\mathrm{km}$. De même, d_{TS} est la distance parcourue par la lumière en $8{,}3\,\mathrm{min}$. Soit $d_{\mathrm{TL}} = 3 \times 10^8 \times 8,3 \times 60 \approx 2 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$ soit environ 200 millions de km.

3. $R_T = 6371\,\mathrm{km}$. La circonférence terrestre est $\mathcal{C} = 2\pi R_T \approx 6 \times 6 \times 10^3$ km $\approx 40\,000$ km. La surface terrestre est $S = 4\pi R_T^2 \approx 10 \times (6 \times 10^3)^2$ km $= 4 \times 10^8$ km^2. La France métropolitaine a une forme d'hexagone. On ne s'intéresse cependant qu'à l'ordre de grandeur des dimensions de la France métropolitaine, que l'on modélisera comme un carré de $1000\,\mathrm{km}$ de côté ($\approx$ distance Rennes-Strasbourg ou Paris-Marseille). La superficie de la France est alors d'environ 10^6 km^2. La circonférence terrestre est donc 40 fois la taille typique de la France, et la surface terrestre au moins

400 fois la surface de la France. **Vous pouvez chercher les dimensions exactes de la France et du globe terrestre et comparer avec ces estimations.**

4. Pour trouver l'ordre de grandeur du nombre de cellules N_c dans le corps humain, on estime le volume moyen V_h du corps humain puis le volume moyen V_c d'une cellule. On a alors $N_c \approx V_h/V_c$. On peut modéliser le corps humain comme un cylindre de hauteur $h = 2\,\text{m}$ et de rayon $r = 20\,\text{cm}$. Alors $V_h = \pi r^2 h \approx 3 \times (20 \times 10^{-2})^2 \times 2 \approx 0,2\ \text{m}^3$. La taille moyenne d'une cellule est 10 μm, soit $V_c \approx (10^{-5})^3 = 10^{-15}\ \text{m}^3$. Finalement, $N_c \approx 0,2/10^{-15} \approx 10^{14}$ cellules.

Remarque : si on ignore la taille d'une cellule on peut essayer de l'estimer en se rappelant qu'un microscope grossissant 10 fois est suffisant pour distinguer une cellule, et que le plus petit détail que l'on peut distinguer à l'œil nu est de l'ordre de 0,1 mm (en regardant une règle on peut imaginer couper un mm en 10 parties, mais pas vraiment plus...). Ceci nous donne 0,1/10 mm = 10 μm pour la taille typique de la cellule. Ces petits exercices sont surtout là pour vous donner des exemples de résolution de problème, où il est nécessaire de faire des hypothèses et modéliser sans être vraiment guidé. Il est normal, surtout au début, de devoir se creuser la tête pour arriver aux bons ordres de grandeur. Connaître quelques ordres de grandeurs fait partie de la culture scientifique attendue d'un physicien ou d'une physicienne. Mais vous avez deux ans pour la développer !

5. Qu'en pensez-vous ? On peut en discuter.

6. Pareil !

Ex. 6 L'échelle de Planck

1. $[c] = L.T^{-1}$ (dimension d'une vitesse), $[G] = M^{-1}.L^3.T^{-2}$ (d'après la loi de la gravitation universelle) et $[h] = [E]/[f] = [\text{Énergie}]/[\text{fréquence}] = M.L^2.T^{-2}/T^{-1} = M.L^2.T^{-1}$.

2. On cherche la longueur de Planck sous la forme $\ell_P = k\ c^\alpha G^\beta h^\gamma$ avec k une constante sans dimension et α, β, γ trois nombres réels à déterminer.

Cette relation est homogène si et seulement si,

$$[\ell_P] = [kc^\alpha G^\beta h^\gamma] = [c]^\alpha [G]^\beta [h]^\gamma \ ,$$
$$\Leftrightarrow L = L^\alpha T^{-\alpha}.M^{-\beta}.L^{3\beta}.T^{-2\beta}.M^\gamma.L^{2\gamma}.T^{-\gamma}\ , \Leftrightarrow L = L^{\alpha+3\beta+2\gamma}.T^{-\alpha-2\beta-\gamma}.M^{-\beta+\gamma}\ .$$

Cette relation est équivalente au système suivant (on égale les exposants dans chaque membre de l'équation) :

$$\begin{cases} 1 = \alpha + 3\beta + 2\gamma\ , \\ 0 = -\alpha - 2\beta - \gamma\ , \\ 0 = -\beta + \gamma\ , \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \gamma\ , \\ \alpha = -3\beta\ , \\ 1 = \alpha + 5\beta\ , \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \gamma = 1/2\ , \\ \alpha = -3/2\ . \end{cases} \quad \text{Conclusion :} \quad \boxed{\ell_P = k\sqrt{\frac{Gh}{c^3}}}\ .$$

3. La longueur de Planck n'ayant pas été construite à partir d'un modèle spécifique mais uniquement en *jouant* avec les constantes fondamentales, on prendra $k = 1$ pour simplifier. Dans ce cas

$$\ell_P \approx \left(\frac{7 \times 10^{-34} \times 7 \times 10^{-11}}{9 \times 10^{24}}\right)^{1/2} \approx 7\left(\frac{10^{-34} \times 10^{-11}}{10^{25}}\right)^{1/2} \approx \boxed{7 \times 10^{-35}\ \text{m}}\ .$$

C'est une longueur se trouvant 20 ordres de grandeurs en dessous de la taille du noyau atomique ($\approx 10^{-15}$ m), peu importe alors si $k = 0,1$ ou 1 ou 10. La longueur de Planck, construite à partir des constantes fondamentales, est la plus petite longueur ayant un sens physique.

4. On trouve $\boxed{\tau_P = k'\sqrt{\frac{Gh}{c^5}}}$ (proportionnel à ℓ_P/c) et $\boxed{m_P = k''\sqrt{\frac{ch}{G}}}$. Pour les A.N. : $\boxed{\tau_P \approx 1 \times 10^{-43}\,\text{s}}$ et $\boxed{m_P = 5 \times 10^{-8}\,\text{kg}}$.