Programme de la semaine du 25 novembre 2024

Cours

Cette semaine, tous les points du programme de colle pourront faire l'objet d'une question de cours !

Chapitre 7 : De l'oscillateur harmonique à l'oscillateur amorti. Régimes transitoires du deuxième ordre.

- **Le circuit LC :** savoir mettre en équation le circuit et mettre l'équation sous la forme canonique de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique. Savoir exprimer la pulsation propre en fonction des paramètres du circuit.
- Connaître la forme de la solution générale de l'équation différentielle de l'O.H. Nécessité de connaître 2 conditions initiales pour fixer les 2 constantes d'intégration. Savoir exprimer la période propre.
- Savoir résoudre l'équation dans le cas où $u_C(t=0) = E$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$.
- Savoir tracer rigoureusement le graphe de la fonction $u_C(t) = E\cos(\omega_0 t)$.
- Savoir montrer que l'énergie totale du circuit est constante au cours du temps et interpréter les oscillations de la tension et de l'intensité du courant comme un échange d'énergie entre le condensateur et la bobine.
- **Circuit RLC « série » :** mise en équation du circuit soumis à une excitation de tension $e(t)$, forme canonique, définition de la pulsation propre et du facteur de qualité.
  ☞ Résolution dans le cas du **régime libre**. Savoir faire un bilan de puissance et mettre en évidence la dissipation de l'énergie électromagnétique dans le circuit. Savoir établir la forme générale de la solution de l'équation différentielle homogène pour les 3 régimes (pseudo-périodique, critique, apériodique), à savoir relier à la valeur du facteur de qualité Q. Savoir déterminer les constantes d'intégration grâce aux conditions initiales $u_C(t=0) = E$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$. Savoir tracer l'allure du graphe de $u_C(t)$. Savoir déterminer le temps d'amortissement (c'est-à-dire le temps caractéristique) de décroissance exponentielle dans les 3 régimes, et tracer l'allure de son évolution en fonction de Q .
  ☞ Dans le cas de la **réponse indicielle** (réponse à un échelon de tension), savoir résoudre l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales $u_C(t=0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0$. Savoir faire un bilan d'énergie et calculer le rendement de la charge du condensateur. **Ces deux derniers points ont été traités en cours sous la forme d'exercices dont je recopie l'énoncé.**

Exercice 1 (Condition initiales)

✍ Montrer que la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2}(t) + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E\ , \qquad t \geq 0\ , \\ u_C(t=0) = 0\ , \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(t=0) = 0\ . \end{cases}$$

s'écrit :

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)\right) \qquad \text{si} \quad Q > 1/2$$

$$u_C(t) = E\left(1 - \frac{r_2}{r_2 - r_1}e^{r_1 t} + \frac{r_1}{r_2 - r_1}e^{r_2 t}\right) \qquad \text{si} \quad Q < 1/2$$

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-\omega_0 t}(1 + \omega_0 t)\right) \qquad \text{si} \quad Q = 1/2$$

Exercice 2 (Bilan d'énergie)

✍ Effectuer le bilan d'énergie du circuit « RLC série » soumis à un échelon de tension, entre l'instant initial $t_1 = 0$ et l'instant final $t_2 = t_f \gg \tau_R$, tel que $u_c(t_f) \simeq E$ (le régime permanent est atteint). En particulier calculer :

— la variation ΔE_C de l'énergie électrostatique stockée dans le condensateur ;

— la variation ΔE_L de l'énergie magnétique stockée dans la bobine ;

— le travail électrique W_e fourni par la source idéale de tension ;

— l'énergie W_R dissipée par effet Joule dans la résistance R.

✍ En déduire que le rendement η de la charge du condensateur est indépendant de R, C et E :

$$\eta \overset{\text{def.}}{=} \frac{\Delta E_C}{W_e} = \frac{1}{2} \ . \tag{1}$$

✌✌✌✌✌✌

- L'exemple du régime libre du circuit « RLC parallèle » a été traité en détail en exercice de TD : **retenir que l'expression du facteur de qualité dépend du circuit et se déduit en mettant l'équation différentielle sous la forme canonique.**

Chapitre 8 : Amplificateur linéaire intégré.

- Savoir représenter le schéma électrique de l'ALI et connaître les notations et le vocabulaire associé pour les courants et potentiels. Savoir que l'ALI est alimenté (préciser comment) et que la masse de cette alimentation doit être commune avec la masse du reste du circuit.
- Savoir que les intensités i_+ et i_- aux entrées non-inverseuse et inverseuse peuvent être considérés comme nulles.
- Savoir tracer la caractéristique de l'ALI et savoir que $v_+ = v_-$ en régime linéaire.
- Savoir identifier la présence d'une rétroaction sur la borne négative (entrée inverseuse) comme un indice de fonctionnement en régime linéaire.
- Savoir établir la relation entrée-sortie des montages amplificateur non-inverseur, suiveur, inverseur et intégrateur et déterminer leur résistance d'entrée.

Méthode d'Euler pour les systèmes linéaires du 1er ordre

On applique la méthode d'Euler pour la résolution numérique du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = f(u(t), t) \ , \quad \text{pour} \quad t \geq t_0 \ , \\ u(t_0) = u_0 \ . \end{cases} \tag{2}$$

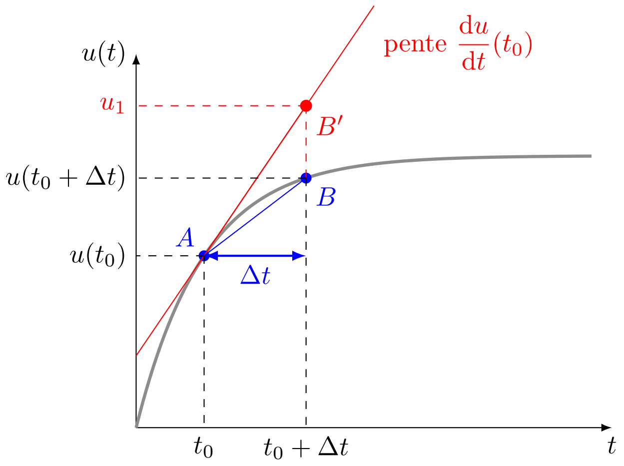
Dans le cas d'un système linéaire du premier ordre, $f(u(t), t) = e(t)/\tau - u(t)/\tau$, avec $\tau > 0$ la **constante de temps** du système et $e(t)$ une fonction quelconque du temps, représentant **l'excitation** du système.

Résoudre numériquement ce problème signifie **déterminer les valeurs approchées** de la fonction u solution aux instants $\{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}\}$ choisis par l'utilisateur ou l'utilisatrice. On notera $\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\}$ les **valeurs approchées** de $\{u(t_1), u(t_2), \ldots, u(t_{n-1})\}$.

La méthode d'Euler est basée sur l'approximation suivante :

$$u(t_0 + \Delta t) \simeq u(t_0) + \Delta t \times \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t_0) \ . \tag{3}$$

On pourra s'appuyer sur un schéma pour expliquer l'approximation :



Les valeurs approchées $\{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$ sont données par la formule de récurrence :

$$u_{k+1} \overset{\text{def.}}{=} u_k + \Delta t \times f(u_k, t_k) \;, \qquad k = 0, 1, \dots n-2 \;, \tag{4}$$

avec Δt le pas de temps, tel que $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ (on choisit des instants régulièrement espacés).

Savoir justifier le choix du pas de temps Δt et de l'instant final $t_f = t_{n-1}$.

Savoir coder une fonction en Python permettant de résoudre une équation différentielle du 1er ordre à l'aide de la méthode d'Euler. Je propose la fonction suivante `euler(f,u0,t)` prenant **3 paramètres :**

- une fonction `f` de 2 variables, qui donne la dérivée de la fonction u ;
- un nombre `u0`, qui représente la condition initiale $u(t_0) = u_0$;
- un tableau numpy `t`, qui représente l'ensemble des instants $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ auxquels on cherche à évaluer la fonction u .

T.S.V.P.

Le **code** de la fonction :

```python
def euler(f,u0,t):
    """
    Fonction implémentant la méthode d'Euler pour l'équation diff. du/dt = f(u(t),t)

    Entrée
    -------------------------------
    f : fonction donnant du/dt (fonction de 2 variables)
    u0 : condition initiale u(t_0) = u_0 (float)
    t : tableau numpy représentant les instants (t_0,t_1,...,t_n-1) auxquels évaluer u(t)

    Sortie
    -------------------------------
    tableau numpy représentant les u(t_k)
    """
    n = len(t)
    dt = t[1]-t[0]
    sol = np.zeros(n)
    sol[0] = u0
    for k in range(n-1):
        sol[k+1] = sol[k] + dt*f(sol[k],t[k])
    return sol
```

Exercices

Exercices sur le **Chapitre 7** et éventuellement sur le **Chapitre 8.**