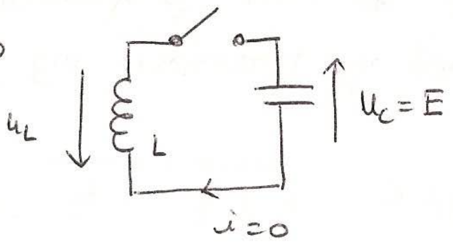
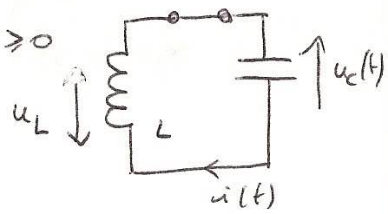
Ex. 1 Oscillateur électrique non amorti :

1)

$t<0$



$t \geq 0$



$u_L + u_C = 0$ (on prend garde à mettre les 2 dipoles en convention récepteur. !! $i = C\frac{du_C}{dt}$ et $u_L = L\frac{di}{dt}$

$\downarrow$

$$L\frac{di}{dt} + u_C = 0$$

$$\Leftrightarrow LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0 \Leftrightarrow \underline{\ddot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0} \quad // \quad (1)$$

$$\text{avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad //$$

2) On résout l'eq° (1) (eq° de l'oscillateur harmonique).

$u_C(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

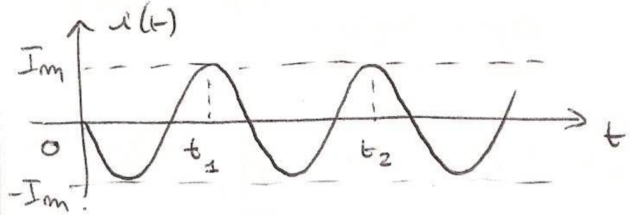
avec les CI : $u_C(0) = E$ (continuité de la tension aux bornes de C)

et $\dot{u}_C(0) = \frac{i(0)}{C} = 0$ (continuité de i ds L)

$$\begin{cases} A = E_0 \\ B\omega_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{u_C(t) = E_0\cos(\omega_0 t)} \quad //$$

$$\underline{i(t) = C\frac{du_C}{dt} = -E_0 C\omega_0\sin(\omega_0 t)} \quad //$$

L'amplitude de $i(t)$ est $E_0 C\omega_0 = I_m$



max pour $\boxed{t_{k+1} = -\frac{\pi}{2\omega_0} + k\frac{2\pi}{\omega_0}}$

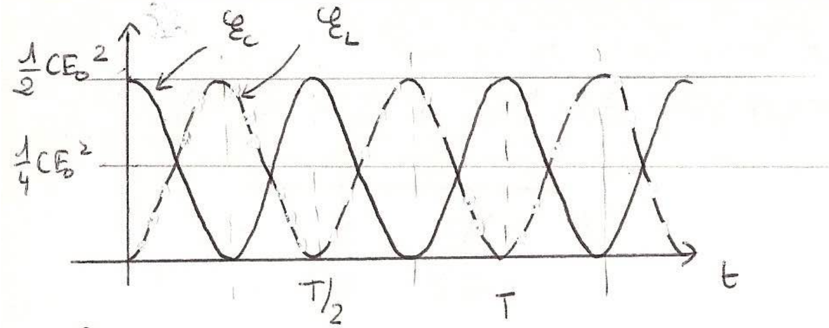
3) L'énergie électromagnétique stockée dans le circuit est

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Cu_C(t)^2 + \frac{1}{2}Li(t)^2$$

$$= \frac{1}{2}CE_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\underbrace{LE_0^2C^2\omega_0^2}_{= CE_0^2 \text{ car } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}}\sin^2(\omega_0 t)$$

$$\mathcal{E}_{tot} = \frac{1}{2}CE_0^2\left(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)\right)$$

$$\underline{\mathcal{E}_{tot} = \frac{1}{2}CE_0^2 \quad \forall t} \quad //$$



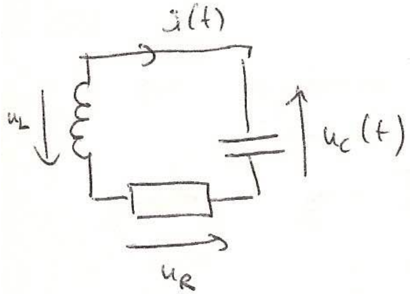
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}CE_0^2\cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}CE_0^2\,\frac{1}{2}\left(1+\cos(2\omega_0 t)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}CE_0^2}_{\text{valeur moyenne}} + \underbrace{\frac{1}{4}CE_0^2\cos(2\omega_0 t)}_{\text{période } T/2}$$

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}CE_0^2\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{4}CE_0^2 - \frac{1}{4}CE_0^2\cos(2\omega_0 t)$$

Ex. 7 La situation est très similaire à celle de l'exercice 3, à la différence de la résistance.



$u_c(0) = \frac{q_0}{C}$

$Q \gg 1$: régime pseudo-périodique

$$u_c(t) = \frac{q_0}{C}e^{-t/\tau}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)$$

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{4-\frac{1}{Q^2}}$$

(Reprendre la démo du cours).

Dans la limite $Q \gg 1$

alors $\Omega \simeq \omega_0$ et $\Omega\tau \simeq 2Q$

$$u_c(t) = \frac{q_0}{C}e^{-t/\tau}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2Q}\sin(\omega_0 t)\right)$$

Rq : pour tout t, $\frac{1}{2Q}|\sin(\omega_0 t)| \ll |\cos(\omega_0 t)|$

et $u_c(t) \simeq \frac{q_0}{C}e^{-t/\tau}\cos(\omega_0 t)$.

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}C\,u_c(t)^2 \simeq \frac{1}{2}C\left(\frac{q_0}{C}\right)^2 e^{-2t/\tau}\cos^2(\omega_0 t)$$

Calculons maintenant $i(t)$:

$$i(t) = C\frac{du_c}{dt} = q_0\,e^{-t/\tau}\left[-\frac{1}{\tau}\cancel{\cos(\Omega t)} - \frac{1}{\Omega\tau^2}\sin(\Omega t) - \Omega\sin(\Omega t) + \frac{1}{\tau}\cancel{\cos(\Omega t)}\right]$$

$$\simeq q_0\,e^{-t/\tau}\left[-\omega_0\sin(\omega_0 t) - \frac{\omega_0}{4Q^2}\sin(\omega_0 t)\right]$$

$$\simeq -q_0\,e^{-t/\tau}\,\omega_0\sin(\omega_0 t)$$

car $\frac{\omega_0}{4Q^2} \ll \omega_0$

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}L\,i(t)^2 = \frac{1}{2}L\,q_0^2\,\omega_0^2\,e^{-2t/\tau}\sin^2(\omega_0 t).$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\,e^{-2t/\tau}\sin^2(\omega_0 t).$$

$$E(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}e^{-2t/\tau}$$

Posons $\underline{E_0 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}}$ et $\underline{\tau' = \frac{\tau}{2} = \frac{Q}{\omega_0}}$ //

On retrouve $E(t) = E_0 e^{-t/\tau'}$ la forme de l'énoncé.

2) $\Delta E = E(t) - E(t+T) = E_0 e^{-t/\tau'} - E_0 e^{-(t+T)/\tau'}$

avec $T = \frac{2\pi}{\Omega} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0}$ lorsque $Q \gg 1$.

$$\Delta E = E_0 e^{-t/\tau'}\left(1 - e^{-T/\tau'}\right) = E(t)\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\omega_0}\frac{\omega_0}{Q}}\right)$$

$$= E(t)\left(1 - e^{-2\pi/Q}\right)$$

$$\simeq E(t)\frac{2\pi}{Q}$$

en utilisant $e^x \simeq 1 + x$ pour $x \ll 1$

Ainsi $\underline{\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi}{Q}}$. //

Plus Q est grand plus la déperdition d'énergie est faible sur une période.