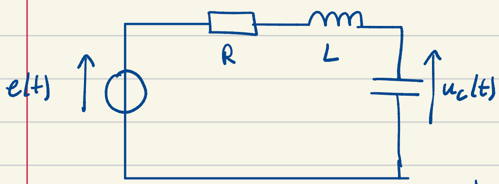
TD 7 — Exo 4. Détermination des paramètres d'un oscillateur amorti



$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(t=0) = E = 3\,V \\ \dfrac{du}{dt}(t=0) = 0 \quad \text{(tangente horizontale sur le graphe)} \end{cases}$$

Pour $t > 0$, $e(t) = 0$ (régime libre)

On rappelle que : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

1) D'après l'oscillogramme, le circuit RLC est dans le régime pseudo-périodique, puisque la tension $u_C(t)$ oscille.

En reprenant la démonstration du cours :

$$u(t) = E\, e^{-t/\tau}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)\right)$$

avec $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

On en déduit la pseudo-période T des oscillations

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{1}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}}$$

avec $T_0 = 2\pi/\omega_0$ la période propre du circuit

2) Posons $f(t) = \cos(\Omega t) + \dfrac{1}{\Omega\tau}\sin(\Omega t)$ telle que :

$$u(t) = E\, e^{-t/\tau} f(t).$$

f est une fonction périodique de période T donc $u(t+T) = e^{-(t+T)/\tau} f(t+T) = e^{-(t+T)/\tau} f(t)$

et $\dfrac{u(t)}{u(t+T)} = \dfrac{e^{-t/\tau} f(t)}{e^{-(t+T)/\tau} f(t+\tau)} = \dfrac{\cancel{e^{-t/\tau}}}{\cancel{e^{-t/\tau}}\, e^{-T/\tau}} \dfrac{\cancel{f(t)}}{\cancel{f(t)}} = e^{T/\tau}$

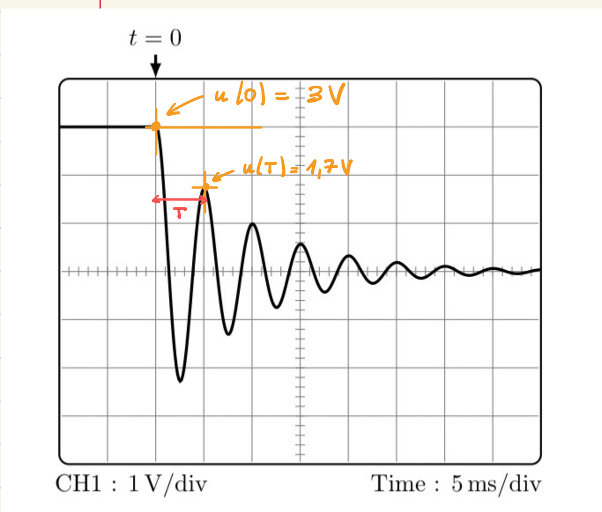
$\Rightarrow \delta = \ln\left(\dfrac{u(t)}{u(t+T)}\right) = \ln\left(e^{T/\tau}\right) = \underline{T/\tau}$ //

indépendant de t

De plus $\delta = \dfrac{T}{\tau} = \dfrac{\omega_0}{2Q} \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - 1/4Q^2}} = \underline{\dfrac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$ //

3) δ permet d'obtenir Q : $\delta^2 = \dfrac{4\pi^2}{4Q^2 - 1}$

$\Leftrightarrow 4Q^2 - 1 = \dfrac{4\pi^2}{\delta^2} \Leftrightarrow \underline{Q = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi^2}{\delta^2}}}$ //



Sur le graphe on mesure (par exemple) :

$\delta = \ln\left(\dfrac{u(0)}{u(T)}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{1{,}7}\right) = 0{,}53$

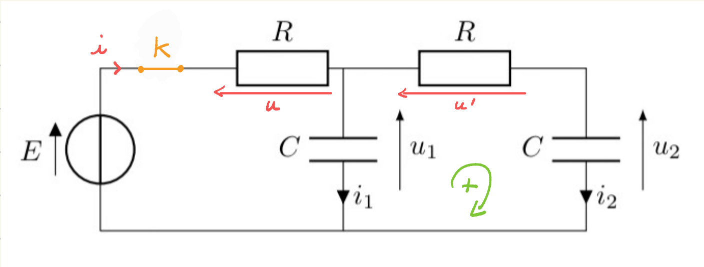
$\Rightarrow \underline{Q = 5{,}9}$ //

De plus on mesure $T = 5$ ms

$\Rightarrow T_0 = T\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} = 4{,}98$ ms

$\Rightarrow \omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \underline{1{,}26 \times 10^3 \text{ rad.s}^{-1}}$ //

Exo 6



1) Continuité de la tension aux bornes des condensateurs :
$u_1(t) = u_2(t) = U_0$ pour $t < 0$ donc $u_1(t=0) = u_2(t=0)$
$= U_0$

Loi des mailles dans la maille de droite : $u_1 - u' - u_2 = 0$

or $u' = R i_2$ donc $i_2 = \dfrac{u_1 - u_2}{R}$

à $t = 0$: $i_2(t=0) = \dfrac{u_1(t=0) - u_2(t=0)}{R} = 0$

car $u_1(t=0) = u_2(t=0) = U_0$

or $i_2(t=0) = C \dfrac{du_2}{dt}(t=0)$ donc $\dfrac{du_2}{dt}(t=0) = 0$

2) 7 inconnues : $i, i_1, i_2, u, u', u_1, u_2$
4 relations caractéristiques (relations courant - tension) :
$\longrightarrow$ 2 lois des mailles + 1 loi des noeuds $\Rightarrow$ 7 équations

Relations caractéristiques :

$$i_1 = C\frac{du_1}{dt} \quad ; \quad i_2 = C\frac{du_2}{dt} \quad ; \quad u = Ri \quad ; \quad u' = Ri_2$$

Loi des noeuds : $i = i_1 + i_2$ (1)

Loi des mailles : $E - u - u' - u_2 = 0$ (grande maille) (2)

$u_1 - u' - u_2 = 0$ (maille de droite) (3)

(2) $E = Ri + Ri_2 + u_2$

$\Rightarrow E = R(i_1 + i_2) + Ri_2 + u_2$

$\Rightarrow E = R\left(C\frac{du_1}{dt} + C\frac{du_2}{dt}\right) + RC\frac{du_2}{dt} + u_2$

$\Rightarrow E = RC\frac{d}{dt}(u' + u_2) + RC\frac{du_2}{dt} + RC\frac{du_2}{dt} + u_2$

$= RC\frac{d}{dt}(Ri_2) + 3RC\frac{du_2}{dt} + u_2$

$\Rightarrow E = (RC)^2\frac{d^2u_2}{dt^2} + 3RC\frac{du_2}{dt} + u_2$

$\Rightarrow \frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{(RC)^2}u_2 = \frac{E}{(RC)^2}$

On pose : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC}$ $\Rightarrow$ $Q = \frac{RC}{3}\omega_0 = \frac{1}{3}$

$Q = 1/3 \Rightarrow$ régime apériodique.

Polynôme caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2$ $\Rightarrow$ discriminant $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) > 0$.

racines : $r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$; $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

Solution générale de l'éq° sans second membre :

$$u_h(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

Solution particulière de l'éq° avec second membre :

$$u_p(t) = E$$

$\Rightarrow$ solution générale : $u_2(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + E$.

$$\Rightarrow \frac{du_2}{dt} = Ar_1 e^{r_1 t} + Br_2 e^{r_2 t}$$

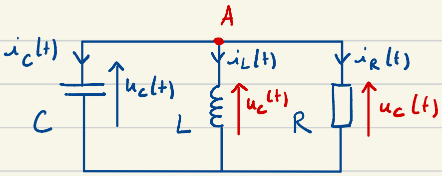
C.I. $\begin{cases} u_2(t=0) = U_0 \\ \frac{du_2}{dt}(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + E = U_0 \\ Ar_1 + Br_2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(1 - r_1/r_2) = U_0 - E \\ B = -A\frac{r_1}{r_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{(U_0 - E)r_2}{r_2 - r_1} \\ B = -\frac{(U_0 - E)r_1}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

$$u_2(t) = E + \frac{U_0 - E}{r_2 - r_1}\left(r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}\right) \quad //$$

Ex. 5 : Circuit RLC parallèle

1)



4 inconnues : i_C, i_L, i_R, u_C. $\Rightarrow$ 4 équations

3 relations courant-tension : $i_C(t) = C\dfrac{du_C}{dt}(t)$ (1) ; $u_C(t) = R\, i_R(t)$ (2)

et $u_C(t) = L\dfrac{di_L}{dt}(t)$. (3)

Loi des noeuds en A : $i_C(t) + i_L(t) + i_R(t) = 0$ (4)

On réinjecte (1) et (2) dans (4) : $C\dfrac{du_C}{dt}(t) + i_L(t) + \dfrac{u_C(t)}{R} = 0$

on dérive : $C\dfrac{d^2u_C}{dt^2}(t) + \dfrac{di_L}{dt}(t) + \dfrac{1}{R}\dfrac{du_C}{dt}(t) = 0$

puis on utilise (3) : $C\dfrac{d^2u_C}{dt^2}(t) + \dfrac{1}{L}u_C(t) + \dfrac{1}{R}\dfrac{du_C}{dt}(t) = 0$.

Forme canonique : on divise par C :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}(t) + \underbrace{\frac{1}{RC}}_{\text{“}\frac{\omega_0}{Q}\text{”}}\frac{du_C}{dt}(t) + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{=\omega_0^2}u_C(t) = 0.$$

On pose $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et Q tq $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{1}{RC}$ soit $Q = \omega_0 RC = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

Finalement : $\dfrac{d^2u_C}{dt^2}(t) + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{du_C}{dt}(t) + \omega_0^2 u_C(t) = 0$, $t \geq 0$ //

2) Pour $t < 0$: commutateur en position 1 ; le régime permanent est atteint : $u_c(t) = E_0$ et $i_L(t) = 0$.

La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps donc : $\underline{u_c(t=0) = E_0}$ //

De plus : $\frac{du_c}{dt}(t) = \frac{1}{C} i_c(t)$; donc on cherche $i_c(t=0)$.

Loi des noeuds à $t=0$ (circuit de la question 1.)

$$i_c(t=0) = -i_R(t=0) - i_L(t=0) \; ;$$

or $i_R(t=0) = \frac{u_c(t=0)}{R} = \frac{E_0}{R}$

et $i_L(t=0) = 0$ car l'intensité du courant traversant une bobine est une fonction continue du temps.

Finalement : $i_c(t=0) = -\frac{E_0}{R}$ et $\underline{\frac{du_c}{dt}(t=0) = -\frac{E_0}{RC}}$ //

3) Problème de Cauchy :
$$\begin{cases} \frac{d^2u_c}{dt^2}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du_c}{dt}(t) + \omega_0^2 u_c(t) = 0 \quad \text{pour } t \geq 0 \\ u_c(0) = E_0 \\ \frac{du_c}{dt}(0) = -\frac{E_0}{RC} \end{cases}$$

Solution générale de l'éq° diff. (qui est homogène).

On cherche les racines du polynôme caractéristique :
$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 .$$

Discriminant : $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right)$.

ici $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$: A.N. $Q = 3,1 > 1/2$

donc $\Delta < 0$: régime pseudo-périodiques ; 2 racines complexes.

$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ et $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

Posons $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ et $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$ tq : $\begin{cases} r_1 = -\frac{1}{\tau} + j\Omega \\ r_2 = -\frac{1}{\tau} - j\Omega \end{cases}$

et $u_C(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$, $t \geq 0$.

De plus $\frac{du_C}{dt}(t) = -\frac{e^{-t/\tau}}{\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$
$+ e^{-t/\tau}\left(-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right)$.

C.I. $\begin{cases} u_C(0) = E_0 \\ \frac{du_C}{dt}(0) = -\frac{E_0}{RC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = E_0 \\ -\frac{A}{\tau} + B\Omega = -\frac{E_0}{RC} \end{cases}$

$\Leftrightarrow A = E_0$ et $B = \frac{E_0}{\Omega}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC}\right)$

$$u_C(t) = E_0 e^{-t/\tau}\left(\cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{RC}\right)\sin(\Omega t)\right)$$ //

4) $R \to +\infty$; $Q \to +\infty$: on retrouve le comportement d'un O.H. de pulsation propre ω_0

en effet aucun courant ne passe dans R : circuit LC.