

## Ex. 5 Équilibres stables et instables.

1) Le point M est soumis à :

- son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$

- la force de rappel du ressort

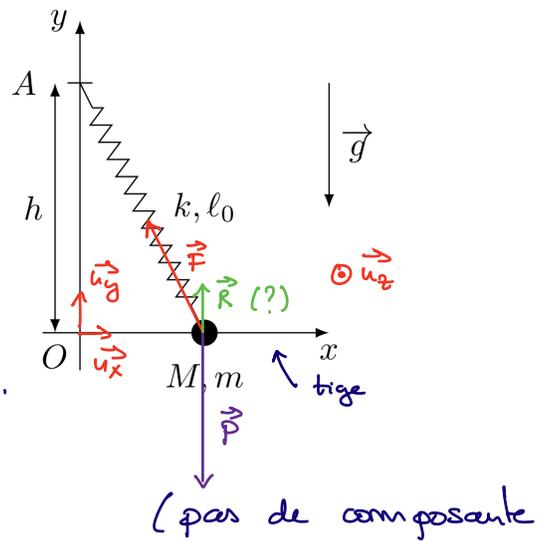
$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$$

avec  $\vec{u} = \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|}$  le vecteur unitaire orienté vers l'ext. du ressort.

- une éventuelle force de réaction

$$\vec{R} = R_y \vec{u}_y$$

selon  $\vec{u}_x$  en l'absence de frottements sur la tige. (pas de composante



Le point M est astreint à se déplacer le long de l'axe (Ox)

$\Rightarrow$  le mvmt est unidimensionnel :

$$\vec{OM} = x(t)\vec{u}_x \quad ; \quad \vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x \quad ; \quad \vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x$$

Par conséquent  $\vec{P}$  et  $\vec{R}$  sont  $\perp$  à chaque instant à  $\vec{v}$

$\Rightarrow$  elles ne travaillent pas.

Reste la force  $\vec{F}$  qui est conservative (résultat du cours).

Donc le mvmt est bien unidimensionnel et conservatif.

2) La force  $\vec{F}$  dérive de l'énergie potentielle :  $E_p(l) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$

or ici  $l = AM = \sqrt{h^2 + x^2}$  donc on écrit  $E_p$  comme

$$\text{une fonction de } x : \quad \underline{E_p(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{h^2 + x^2} - l_0)^2}$$

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}k(\sqrt{h^2 + x(t)^2} - l_0)^2$$

or  $E_m$  est une constante du mvmt donc :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + k\frac{\dot{x}x}{\sqrt{h^2 + x^2}}(\sqrt{h^2 + x^2} - l_0) = 0$$

En supposant que  $\ddot{x}(t)$  n'est pas identiquement nulle on trouve l'éqo du mvt :

$$m \ddot{x}(t) = -k \frac{x(t)}{\sqrt{h^2 + x(t)^2}} \left( \sqrt{h^2 + x(t)^2} - l_0 \right) //$$

3) Étudions les variations de  $E_p(x)$ .

$$4) \frac{dE_p}{dx}(x) = k \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \left( \sqrt{x^2 + h^2} - l_0 \right)$$

$$\text{alors } \frac{dE_p}{dx}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x^2 + h^2} = l_0$$

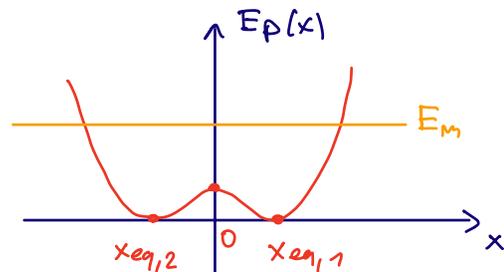
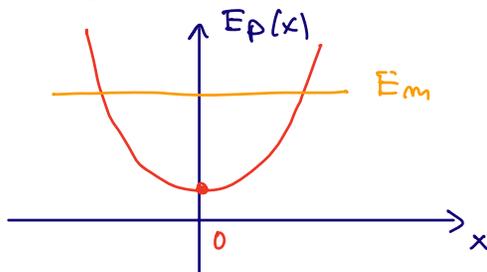
$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = l_0^2 - h^2$$

Si  $l_0 < h$  alors la seule racine est  $x = 0$ .

Si  $l_0 > h$  alors il y a 2 autres racines :

$$\left. \begin{array}{l} x_{eq,1} = + \sqrt{l_0^2 - h^2} \\ x_{eq,2} = - \sqrt{l_0^2 - h^2} \end{array} \right\}$$

En étudiant le signe de la dérivée on aboutit aux graphes suivants :



En superposant le graphe de l'énergie mécanique (constante) on constate qu'il n'existe que des états liés.

5) Approximation harmonique du voisinage de la pos. d'éq. stable  $x_{eq,1}$ .

$$E_p(x) \approx \underbrace{E_p(x_{eq,1})}_{=0} + (x - x_{eq,1}) \underbrace{\frac{dE_p}{dx}(x_{eq,1})}_{=0} + \frac{1}{2} (x - x_{eq,1})^2 \underbrace{\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq,1})}_{=k_{eff}}$$

Période des petites oscillations:  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m}}$

Calculons  $k_{eff} = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_{eq,1})$ .

$$\begin{aligned} \frac{d^2E_p}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( kx - k \frac{l_0 x}{\sqrt{x^2 + h^2}} \right) \\ &= k - k l_0 \frac{\sqrt{x^2 + h^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + h^2}}}{x^2 + h^2} \\ &= k \left( 1 - l_0 \frac{x^2 + h^2 - x^2}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \right) \\ &= k \left( 1 - l_0 \frac{h^2}{(x^2 + h^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{eff} &= k \left( 1 - l_0 \frac{h^2}{(l_0^2 - h^2 + h^2)^{3/2}} \right) \\ &= k \left( 1 - l_0 \frac{h^2}{l_0^3} \right) = k \frac{l_0^2 - h^2}{l_0^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{\sqrt{l_0^2 - h^2}}{l_0}} \Rightarrow T_0 = \underline{\underline{2\pi \sqrt{\frac{m}{k} \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 - h^2}}}}}$$