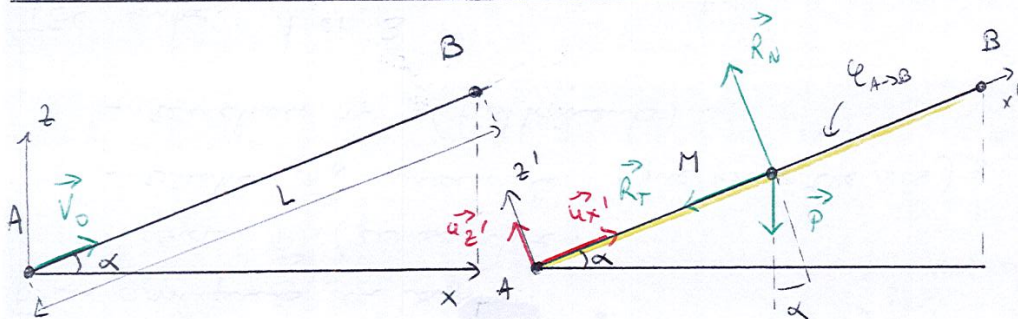


TD n°16. Énergie.

Ex 1 : Plan incliné avec frottements.



On étudie l'objet assimilé à un pt mat. de masse m dans le ref. du plan incliné supposé galiléen. Le système est soumis à son poids $\vec{P}$, à la réaction tangentielle $\vec{R}_T$, et à la réaction normale $\vec{R}_N$ du support. On applique le

TEC entre les points A et B :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_T) + W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_N)$$

$$\forall t \quad \vec{R}_N \perp \vec{v} \Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_N) = 0$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_T) = \int_{M \in \mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{R}_T \cdot d\vec{OM} \quad \begin{matrix} \vec{R}_T = -\|\vec{R}_T\| \vec{u}_x' \\ \text{(loi de Coulomb)} \end{matrix}$$

$\mathcal{C}_{A \rightarrow B}$: chemin parcouru de A à B.

$$\text{et } d\vec{OM} = dx' \vec{u}_x'$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_T) = - \int_{x_A}^{x_B} \|\vec{R}_T\| dx = -\|\vec{R}_T\| L. \quad (1)$$

D'après la loi de Coulomb pour le glissement

$$\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\|$$

On applique le PFD au système pour avoir

$$\|\vec{R}_N\| : m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$$

$$\text{avec } \vec{P} = -mg \sin(\alpha) \vec{u}_x' - mg \cos(\alpha) \vec{u}_z'$$

$$\vec{R}_T = -\|\vec{R}_T\| \vec{u}_x' \quad \text{et} \quad \vec{R}_N = \|\vec{R}_N\| \vec{u}_z'$$

En projection sur $\vec{u}_x'$ et $\vec{u}_z'$:

$$\begin{cases} m \ddot{x}' = -mg \sin \alpha - \|\vec{R}_T\| \\ m \ddot{z}' = 0 = -mg \cos \alpha + \|\vec{R}_N\| \end{cases} \quad (\text{car l'objet ne décolle pas})$$

$$\Rightarrow \|\vec{R}_N\| = mg \cos \alpha$$

$$\text{et } W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_T) = -fmgL \cos \alpha //$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_{M \in \mathcal{C}_{A \rightarrow B}} \vec{P} \cdot d\vec{OM} = -mg \int_{z_A}^{z_B} dz$$

$$= -mg(z_B - z_A) = -mgL \sin \alpha$$

$$\text{Finalement } \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -mgL \sin \alpha - fmgL \cos \alpha$$

le système atteint le pt B si $v_B \geq 0$
 (si $v_B > 0$ il dépasse le pt B, s'arrête plus loin et redescend).

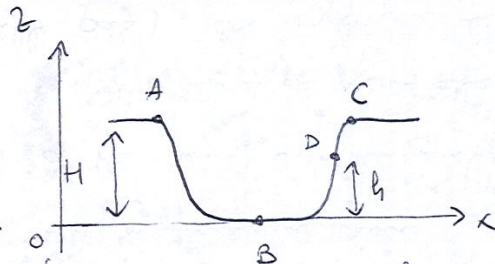
avec $v_A = v_0$ on obtient

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \geq \mu g L \sin \alpha + f \mu g L \cos \alpha$$

$$v_0 \geq \sqrt{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)L}$$

Ex 2 : Half-pipe.

1. On étudie le mvt du skieur ou de la skieuse dans le ref du Half-pipe supposé galiléen.



Forces appliquées au syst :

- poids $\vec{P}$ (conservative)
- réaction $\vec{R}_N$ normale (ne travaille pas)
- réaction $\vec{R}_T$ (frottements).

TEC entre A et B :

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W(\vec{P})_{A \rightarrow B} + W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_T)$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_T) \leq 0 \quad (\text{force résistante})$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A) = mgH > 0$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mgH + W_{A \rightarrow B}(\vec{R}_T) \quad (v_A = 0)$$

en l'absence de frottements

la vitesse max est $v_B = \sqrt{2gH}$

$$\text{A.N.} \quad v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 5} = \sqrt{100} = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

2) En l'absence de frottements le mvt est conservatif : $E_m = E_c + E_p = \text{cte}$.

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad \text{et} \quad E_p = mgz \quad (\text{en choisissant l'origine de l'énergie potentielle en bas du pipe}).$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mgz = \text{cte} = \frac{1}{2} m v_A^2 + mgz_A = mgH.$$

La hauteur max de l'autre côté de la rampe est atteinte lorsque $v=0$, soit $z=H$.

3) On applique à nouveau le TEM :

$$\Delta E_m = W_{A \rightarrow D}(\vec{R}_T) \Rightarrow \begin{matrix} E_{mD} = mgh \\ E_{mA} = mgH \end{matrix} \Rightarrow \underline{W_{A \rightarrow D}(\vec{R}_T) = mg(h-H) < 0}$$

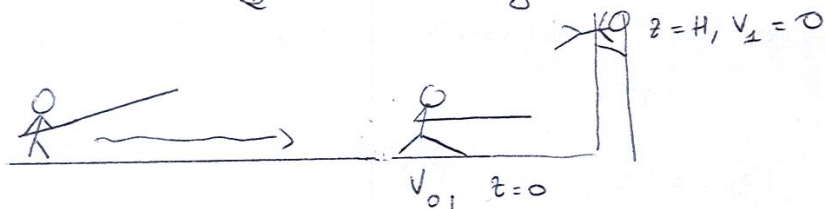
Ex 3 Sauter après une course d'élan consiste à convertir l'énergie cinétique en énergie potentielle de pesanteur. Cette conversion a lieu en 2 temps.

Énergie cinétique $\longrightarrow$ Énergie potentielle élastique
(muscle et tendons ou poutre)
 $\swarrow$
Énergie potentielle de pesanteur.

La poutre permet de convertir efficacement l'énergie cinétique "horizontale" en énergie élastique et de la restituer "verticalement".

En négligeant toute dissipation d'énergie

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = \text{cste.}$$

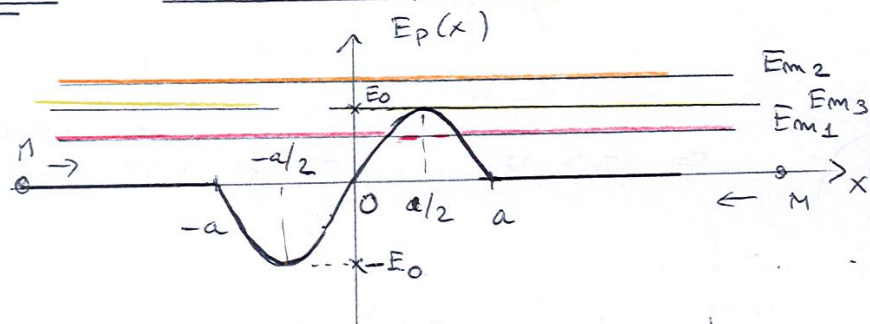


$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH \Rightarrow H = \frac{v_0^2}{2g}$$

A.N. En prenant $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ (vitesse moyenne

d'un excellent sauteur de 100 m) (2)
 $H = \frac{100}{2 \times 10} = 5 \text{ m}$
 $\Rightarrow$ En réalité on a calculé l'élévation du centre de gravité du sauteur $\Rightarrow$ ajouter 1 m

Ex 6 : Barrière de potentiel.



Le syst est conservatif : $E_m = \text{cste}$
 $= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x)$.

1) La particule arrive de $x = -\infty$ à la vitesse $v_0 \vec{u}_x$ ($\dot{x} = v_0$)

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2$$

On trace la droite horizontale E_m

$\Rightarrow$ 3 trajectoires possibles :

⊗ $E_m < E_0 \Rightarrow$ la particule s'arrête avant d'atteindre le sommet en $a/2$ et rebrousse chemin jusqu'à $-\infty$

⊗ $E_m = E_0 \Rightarrow$ la particule s'arrête pile au sommet, en $a/2$

⊗ $E_m > E_0 \Rightarrow$ la particule franchit la barrière de potentielle et poursuit son chemin vers $x = +\infty$.

2) Si la particule arrive de $x = +\infty$ avec la vitesse $-v_0 \vec{u}_x$ on reboute les 3 m classes de trajectoires.