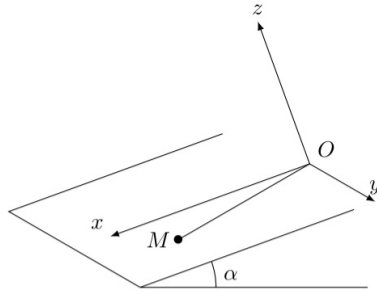


Exercice 4 (Pendule sur un plan incliné)

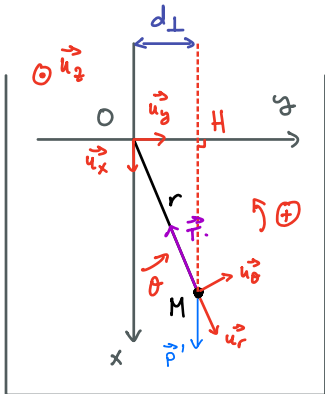
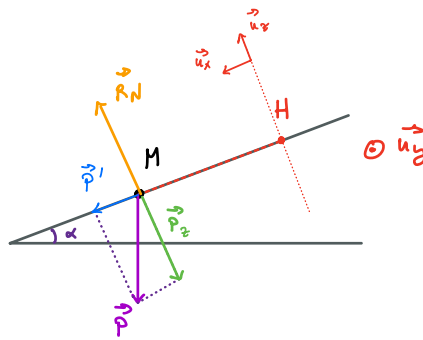
Un pendule simple est constitué d'un point M de masse m attaché à un fil de masse négligeable, de longueur ℓ . L'autre extrémité du fil est accrochée à un point O fixe sur un plan incliné faisant un angle α avec le plan horizontal. Le point M peut se déplacer sans frottement sur le plan incliné.

On introduit un repère cartésien $(Oxyz)$. L'axe (Oz) est orthogonal au plan incliné, vers le haut. L'axe (Ox) est orienté selon la ligne de plus grande pente, vers le bas.



➤ Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) et en déduire l'équation du mouvement.

Vue du dessus

Vue de côté

Système : point matériel de masse m .

Références : plan incliné, galilée.

Re pose : $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. $\longrightarrow$ base locale cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

Bilan des forces : poids $\vec{P}$, réaction normale du support $\vec{R}_N$,
tension du fil $\vec{T}$.

TMC par rapport à l'axe (Oz) .

$$\frac{dL_{(Oz)}}{dt} = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{R}_N) + \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{T}).$$

$$\text{avec } L_{(Oz)} = m(\vec{OM} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u}_z = m l^2 \dot{\theta}$$

à redémontrer si besoin
(mais quasi résultat du cours
→ mouvement circulaire de rayon $r=l$)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{R}_N) &= 0 & \text{car } \vec{R}_N \parallel (Oz) \\ \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{T}) &= 0 & \text{car } \vec{T} \text{ dirige vers } (Oz) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{R}_N) &= 0 \\ \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{T}) &= 0 \end{aligned}} \right\} \text{Je ne fais pas de calculs !!}$$

$$\text{et } \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}) = \mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}') = \pm \|\vec{P}'\| d_{\perp}$$

Je m'appuie sur mon schéma très détaillé !
(presque pas de calculs ou justifications).

J'élimine la composante $\parallel$ à (Oz) .

avec $\|\vec{P}'\| = \|\vec{P}\| \sin(\alpha) = mg \sin(\alpha)$

et $d_{\perp} = l \sin \theta$ le bras de levier.

Si $\theta > 0$ $\vec{P}'$ fait tourner dans le sens négatif.

donc $\mathcal{M}_{(Oz)}(\vec{P}') = - mg \sin(\alpha) \sin \theta$

Finalement : $m l^2 \ddot{\theta} = - mg \sin(\alpha) \sin \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g \sin(\alpha)}{l} \theta = 0$