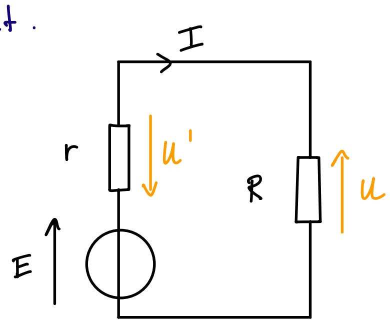
Ex. 9 Rendement en puissance ✪

Un générateur de tension (force électromotrice E, résistance interne r) délivre un courant I dans une résistance R variable.

Étape de modélisation.

1. Exprimer la puissance $\mathcal{P}_R$ dissipée dans R en fonction de E, r et R.
2. On définit le rendement en puissance $\eta = \dfrac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_E}$ comme le rapport de la puissance $\mathcal{P}_R$ reçue par la charge (ici la résistance R) et de la puissance utile $\mathcal{P}_E = E \times I$ fournie par le générateur. Quelle est la valeur maximale du rendement en puissance en fonction de R ? Commenter.
3. Pour quelle valeur R_m de la résistance R la puissance reçue par la résistance est-elle maximale ? Que vaut alors $\mathcal{P}_{R,\max}$? Quelle est la valeur de η ? On dit dans ce cas qu'il y a *adaptation d'impédance* et la puissance transmise est maximale.

Étape de modélisation. Avant toute chose, il faut dessiner le schéma du circuit.



1) Étapes de raisonnement : comment s'exprime P_R, puissance dissipée dans R ?

D'après le cours $P_R = RI^2$ (effet Joule). Il faut donc trouver I !

→ On se ramène à l'exercice du cours.

Mise en équation du circuit. 3 inconnues : I, u, u'

2 relations courant tension : $u = RI$; $u' = rI$

Loi des mailles : $E - u - u' = 0$ donc $E - rI - RI = 0$

donc $I = \dfrac{E}{r+R}$

Finalement : $P_R = \dfrac{RE^2}{(r+R)^2}$

2) $P_E = EI = \dfrac{E^2}{r+R}$ donc $\eta = \dfrac{R}{r+R}$ //

η est une fonction strictement croissante de R, tendant vers 1 (sa valeur max) lorsque R tend vers l'infini. En prenant $R \gg r$ on peut augmenter le rendement pour s'approcher de 1. Cependant si $R \to +\infty$ alors $P_R \to 0$ donc on ne peut pas à la fois avoir le rendement max et transférer une quantité d'énergie non nulle à la résistance R.

3) On cherche alors à maximiser P_R au détriment du rendement.

$$P_R = \frac{R E^2}{(r+R)^2} = \frac{R}{r^2}\frac{E^2}{(1+R/r)^2} = \frac{E^2}{r}\frac{R/r}{(1+R/r)^2}$$

Posons $x = R/r$ et étudions la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{(1+x)^2}$

$$f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 2(1+x)x}{(1+x)^4} = \frac{1+x-2x}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0

Donc le max de P_R est obtenu pour $x = 1$ càd $R = r$

$$P_{R,max} = \frac{E^2}{4r} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{1}{2}$$