TD 11
Propagation des signaux.

Ex. 4 La marée

1) Sur la figure 1, on observe que la hauteur d'eau oscille autour d'un niveau moyen d'environ 4 m. Le signal n'étant pas régulier, il est difficile de lire la valeur exacte de la moyenne sur ce graphe. En revanche, le spectrogramme présente un pic à fréquence nulle, correspondant à la composante continue A_0 du signal. En utilisant l'échelle indiquée sur l'axe des ordonnées on trouve : $\boxed{A_0 = 4{,}2\,\text{m.}}$

Le signal n'est pas périodique. Sur la figure 1 on observe que le signal est quasi-sinusoïdal avec une amplitude modulée dans le temps. Le spectre déduit de la figure 2 est celui d'un signal non-périodique, contenant au moins 7 fréquences qui ne sont pas multiples entiers d'une fréquence fondamentale.

2) Soit T_h la durée moyenne entre deux marées hautes consécutives. On mesure sur la figure 1 la durée entre 21 marées hautes successives afin de diminuer l'incertitude. On trouve en utilisant l'échelle indiquée sur l'axe des abscisses $20T_\text{h} = 10{,}3\,\text{jours}$, soit $\boxed{T_\text{h} = 0{,}52\,\text{jours}}$ c'est-à-dire $\boxed{T_\text{h} = 12{,}48\,\text{heures} = 12\ h\ 29\ min.}$

On mesure de la même manière la durée moyenne T_b entre deux marées basses consécutives et on trouve le même résultat, $\boxed{T_\text{b} = 0{,}52\,\text{jours.}}$

Le pic de plus grande amplitude sur le spectrogramme est de fréquence $f_1 = 1{,}935\,\text{jour}^{-1}$, correspondant à la période $T_1 = 0{,}5168\,\text{jour} = 12{,}40\,\text{h} = 12$ h 25 min, très proche de la valeur mesurée pour T_h et T_b.

3) Les vives eaux correspondent aux maxima des battements de l'amplitude et les mortes eaux au minima. Soit $T_\text{v.e.}$ la durée entre deux vives eaux consécutives et $T_\text{m.e.}$ la durée entre deux mortes eaux consécutives. On mesure $\boxed{T_\text{v.e.} = 13{,}7\,\text{jours}}$ et $\boxed{T_\text{m.e.} = 15{,}5\,\text{jours.}}$

4) On mesure $f_1 = 1{,}935\,\text{jour}^{-1}$ et $f_2 = 2\,\text{jour}^{-1}$. On en déduit $\boxed{\omega_1 = 2\pi f_1 = 12{,}16\,\text{rad}\cdot\text{jour}^{-1}}$ et $\boxed{\omega_2 = 2\pi f_2 = 12{,}57\,\text{rad}\cdot\text{jour}^{-1}.}$ Les périodes associées sont $\boxed{T_1 = 0{,}5168\,\text{jour} = 12\text{ h }25\text{ min}}$ et $\boxed{T_2 = 0{,}50\,\text{jour} = 12\,\text{h.}}$

L'alternance des vives eaux et mortes eaux fait penser à un phénomène de battements entre deux signaux de fréquences voisines. Les fréquences des deux composantes sinusoïdales retenues dans le modèle sont en effet très proches. Le rapport entre la différence des fréquences $\Delta f = f_2 - f_1$ et la fréquence moyenne $f_m = (f_1 + f_2)/2$ vaut $\Delta f / f_m = 0,03 = 3\%$. L'amplitude du signal résultant de l'addition des deux sinusoïdes oscille avec une période

$$T_\text{batt} = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1}{f_2 - f_1}\ .$$

L'application numérique donne $T_\text{batt} = 2\pi/0.4084 = \boxed{15{,}38\,\text{jour.}}$ Ce modèle simple semble bien prédire une alternance entre vives eaux et mortes eaux avec une période cohérente avec la valeur mesurée expérimentalement. Néanmoins, notre modèle prédit la même durée entre deux mortes eaux ou deux vives eaux, en contradiction avec l'observation. Cette différence s'explique principalement par la présence de la fréquence $f_3 = 1{,}895\,\text{jour}^{-1}$ dans le spectre, dont l'amplitude associée n'est pas négligeable.