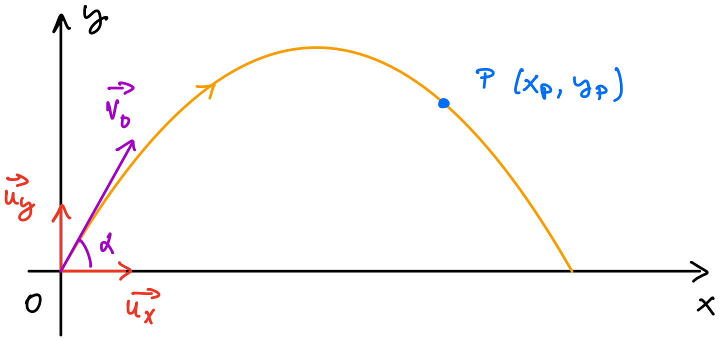
4) **Tir dans un champ de pesanteur uniforme**

Exercice 5 (Tir sans frottements)

On s'intéresse au mouvement d'un objet, assimilé à un point matériel M de masse m, lancé avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ dans le champ de pesanteur terrestre uniforme $\vec{g}$, en l'absence de frottements. On note α l'angle que fait la vitesse avec l'horizontale.

1. Déterminer l'angle α_1 pour lequel l'objet arrive le plus loin possible.
2. Montrer que si $v_0 = \|\vec{v_0}\|$ est fixée, l'objet ne peut atteindre que des points situés sous une courbe parabolique appelée **parabole de sûreté**. On pourra pour cela chercher à quelles conditions les coordonnées d'un point quelconque peuvent être sur une trajectoire possible de l'objet.



On a déterminé dans la question 1 l'équation cartésienne de la trajectoire :

$$y = -\frac{1}{2}\, g \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)\, x$$

$V_0 = \|\vec{V_0}\|$ est fixée, mais α peut varier. Soit $\mathcal{P}(x_p, y_p)$ un point quelconque du plan (Oxy). Ce point peut être atteint par un projectile <u>ssi</u> :

$$y_p = -\frac{1}{2}\, g \frac{x_p^{\ 2}}{V_0^2 \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha)\, x_p . \qquad (1)$$

Dans l'éq° (1) tous les paramètres sont fixés sauf α. On peut réécrire l'éq. (1) comme une éq. sur $\tan(\alpha)$. En effet $\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$ donc :

$$y_p = -\frac{1}{2}\, g \frac{x_p^2}{V_0^2} \left(1 + \tan^2(\alpha)\right) + \tan(\alpha)\, x_p$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{2}\, g \frac{x_p^2}{V_0^2}\right) \tan^2(\alpha) + x_p \tan(\alpha) - \frac{1}{2}\, g \frac{x_p^2}{V_0^2} - y_p = 0$$

trinôme du second degré pour $\tan(\alpha)$.

$$\Delta = x_p^2 - 4\left(\frac{1}{2}\, g \frac{x_p^2}{V_0^2}\right)\left(\frac{1}{2}\, g \frac{x_p^2}{V_0^2} + y_p\right)$$

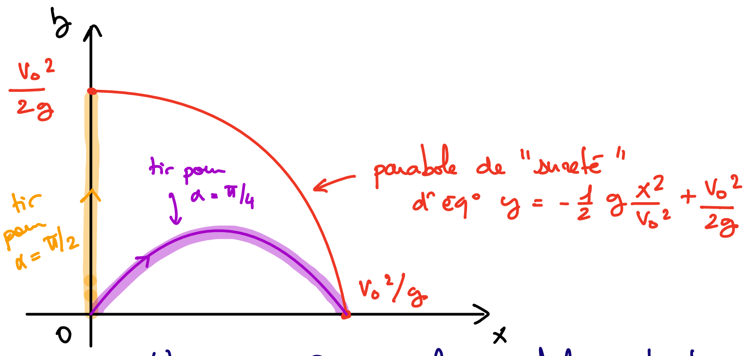
Comme $\tan\alpha$ est réel, il faut $\Delta \geqslant 0$ donc

$$\cancel{x_p^2} - 2g \frac{\cancel{x_p^2}}{V_0^2} \left(\frac{1}{2}\, g \frac{x_p^2}{V_0^2} + y_p\right) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 2g\frac{1}{V_0^2}\left(\frac{1}{2}g\frac{x_P^2}{V_0^2} + y_P\right) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{V_0^2}{2g} \geqslant \frac{1}{2}g\frac{x_P^2}{V_0^2} + y_P$$

$$\Leftrightarrow \quad y_P \leq -\frac{1}{2}g\frac{x_P^2}{V_0^2} + \frac{V_0^2}{2g}$$



Un point P <u>sous</u> la parabole peut être atteint par le projectile (reste à trouver pour quelle valeur de α). Un point au-dessus de la parabole ne peut pas être atteint.