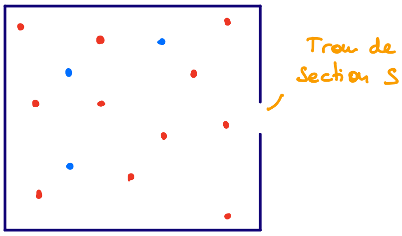
Ex. 3 Fuite de gaz



1) L'air s'échappe par le trou de section S. Le gaz étant parfait on traite indépendamment N_2 et O_2 (hypothèse du gaz parfait). On note $N_1(t)$ et $N_2(t)$ le nombre de molécules de N_2 et O_2, respectivement, à l'instant t.

Le nombre de molécules N_2 quittant le réservoir entre t et $t+dt$ est égal au nombre de molécules présentes à l'instant t dans le cylindre de base S et de longueur $v_1^* \, dt$, soit :

$$\underset{\text{isotropie}}{\frac{1}{6}} \; \underbrace{\frac{N_1(t)}{V}} \; \underbrace{(v_1^* \, dt)\, S}_{\text{volume du cylindre}}$$

densité particulaire moyenne dans toute l'enceinte. Comme le trou est très petit, on suppose que la répartition des molécules est homogène, malgré la fuite. Contrairement au calcul de la pression cinétique, la densité varie car le nombre de particules varie.
Si dt est suffisament petit, on suppose que la densité ne varie pas entre t et $t+dt$!

Ainsi
$$\underbrace{N_1(t+dt) - N_1(t)} = -\frac{1}{6}\frac{N_1(t)}{V} S \, v_1^* \, \cancel{dt}$$

$$= \frac{dN_1}{dt}(t) \, \cancel{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dN_1}{dt}(t) + \underbrace{\frac{1}{6}\frac{S v_1^*}{V}}_{= 1/\tau_1} N_1(t) = 0.$$

De même pour O_2 : $\displaystyle \frac{dN_2}{dt}(t) + \frac{1}{\tau_2} N_2(t) = 0$

avec $\displaystyle \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{6}\frac{S v_2^*}{V}$

Alors : $N_1(t) = N_{1,0} \, e^{-t/\tau_1}$ et $N_2 = N_{2,0} \, e^{-t/\tau_2}$

Pour les pressions partielles, d'après la loi des GP :

$$P_{N_2}(t) = \frac{N_1(t)}{\mathcal{N}_A}\frac{RT_0}{V} \quad \text{et} \quad P_{O_2}(t) = \frac{N_2(t)}{\mathcal{N}_A}\frac{RT_0}{V}$$

et $\dfrac{P_{N_2}(t)}{P_{O_2}(t)} = e^{-t\left(\frac{1}{\tau_1}-\frac{1}{\tau_2}\right)}$ or $v_1^* = \sqrt{\dfrac{3RT_0}{M_1}}$ et $v_2^* = \sqrt{\dfrac{3RT_0}{M}}$

et $M_1 > M_2$ donc $v_1^* < v_2^*$

donc $\dfrac{1}{\tau_1} < \dfrac{1}{\tau_2}$

Ainsi $\underline{\dfrac{P_{N_2}(t)}{P_{O_2}(t)} \xrightarrow{t\to+\infty} +\infty}$ càd $\dfrac{P_{O_2}(t)}{P_{N_2}(t)} \longrightarrow 0$ h

2) $P(t) = P_{O_2}(t) + P_{N_2}(t)$.

avec $P_{O_2}(t) = \dfrac{N_{2,0}}{\mathcal{N}_A}\dfrac{RT_0}{V}\,e^{-t/\tau_2} = P_{O_2}(t=0)\,e^{-t/\tau_2}$

De même $P_{N_2}(t) = P_{N_2}(t=0)\,e^{-t/\tau_1}$

De plus $P_{N_2}(t=0) = 0{,}8\,P_0$ et $P_{O_2}(t=0) = 0{,}2\,P_0$

Finalement $P_{N_2}(t) = 0{,}8\,P_0\,e^{-t/\tau_1}$ et $P_{O_2}(t=0) = 0{,}2\,P_0\,e^{-t/\tau_2}$

donc $P(t) = P_0\left(0{,}8\,e^{-t/\tau_1} + 0{,}2\,e^{-t/\tau_2}\right)$.

<u>A.N.</u> $v_1^* = \left(\dfrac{3RT_0}{M_1}\right)^{1/2} = 480 \ \text{m.s}^{-1}$

$v_2^* = \left(\dfrac{3RT_0}{M_2}\right)^{1/2} = 513 \ \text{m.s}^{-1}$

$S = 1 \ \text{mm}^2 = 10^{-6} \ \text{m}^2$

$\tau_1 = 6{,}26 \times 10^5 \ \text{s}$

$\tau_2 = 5{,}85 \times 10^5 \ \text{s}$

$t = 1\,h = 3600 \ \text{s}$:

$P = 0{,}994$ bar

$P_{N_2} = 0{,}795$ bar

$P_{O_2} = 0{,}199$ bar

$\underline{\dfrac{P_{O_2}}{P_{N_2}} = 0{,}250}$ h

$S = 1\ cm^2 = 10^{-4}\ m^2$: $\tau_1 = 6,27 \times 10^3\ s$

$\tau_2 = 5,85 \times 10^3\ s$

$t = 1h = 3600\ s$: $P = 0,545$ bar (gasp !)

$P_{N_2} = 0,432$ bar

$P_{O_2} = 0,112$ bar

$$\frac{P_{O_2}}{P_{N_2}} = 0,260$$

La pression totale chute beaucoup plus vite, mais la proportion de O_2 a légèrement augmenté par rapport au 1er cas, tout en restant proche de la situation initiale !

Cadeau : mon script python pour les A.N. De rien !

```
import numpy as np


T0 = 295
R = 8.314
M1 = 32e-3
M2 = 28e-3

v1 = np.sqrt(3*R*T0/M1)
v2 = np.sqrt(3*R*T0/M2)


V = 50
S = np.array([1e-6, 1e-4])
```

hop, un tableau numpy avec les 2 valeurs de S demandées !

```
tau_1 = 6*V/(S*v1)
tau_2 = 6*V/(S*v2)
```

renvoie 1 tableau avec 2 valeurs !

```
P0 = 1 #bar

def P_O2(t):
    return 0.2*P0*np.exp(-t/tau_1)

def P_N2(t):
    return 0.8*P0*np.exp(-t/tau_2)

def P(t):
    return P_O2(t) + P_N2(t)

t = 3600

Pf = P(t)
P_N2f = P_N2(t)
P_O2f = P_O2(t)

r = P_O2(t)/P_N2(t)
```

renvoie un tableau avec 2 valeurs !