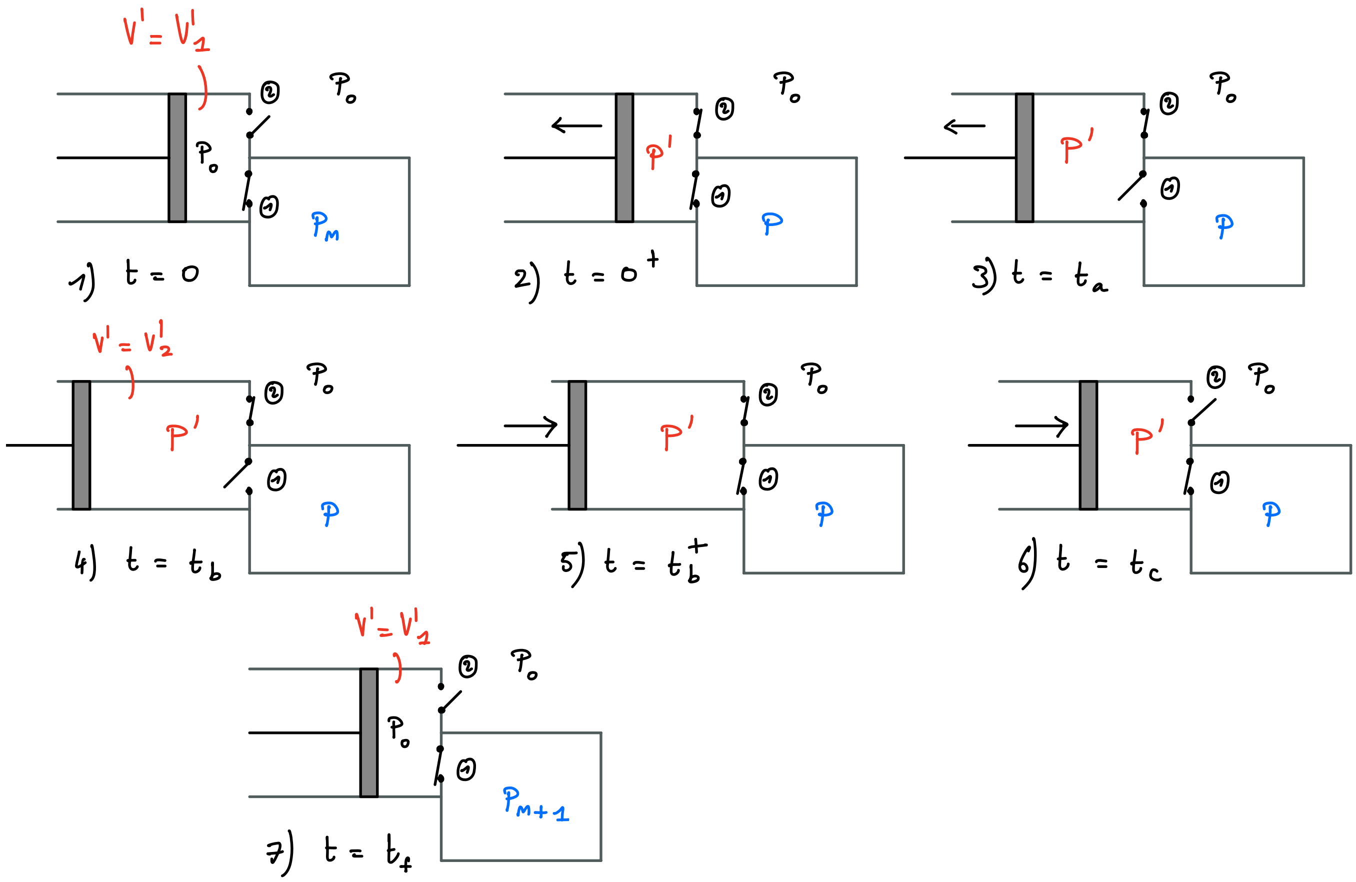
Ex. 2 : Pompe isotherme



1) Évolution de P et P' lors du coup de pompe numéro m.

1) $t = 0$ $\qquad P_m < P_0 \qquad$ ① fermée

2) $t = 0^+ \xrightarrow[V' \nearrow]{}$ 3) $t = t_a$ $\qquad P' = P = P_m$

$P' \searrow$, $P = P_m$ $\qquad$ ouverture de ①

3) $t = t_a \xrightarrow[V' \nearrow]{}$ 4) $t = t_b$ $\qquad P' = P = P_{m+1} < P'$

$P' \searrow$, $P \searrow$

($P' = P$ car le réservoir et le corps de pompe sont connectés)

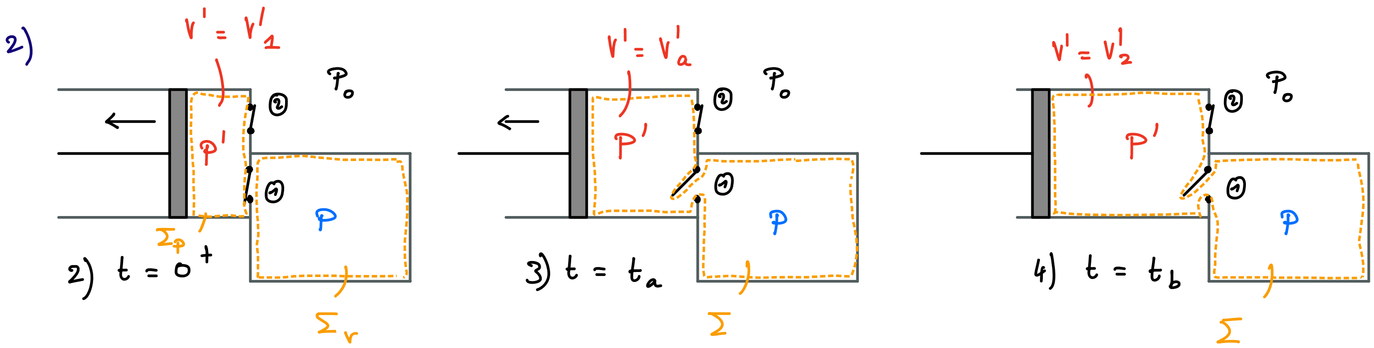
5) $t = t_b^+ \xrightarrow[V' \searrow]{}$ 6) $t = t_c$ $\qquad P' = P_0$, $P = P_{m+1}$ $\xrightarrow[V' \searrow]{}$ 7) $t = t_f$ $\quad P' = P_0$, $P = P_{m+1}$

$P' \nearrow$, $P = P_{m+1}$ $\qquad$ ouverture de ②

le corps de pompe se vide

($P' = P_0$ mais $n' \searrow$) (n' qté de matière ds le corps de pompe)

2)



On travaille avec le système fermé $\Sigma = \{$air dans le corps de pompe + air ds le réservoir$\}$.

⊛ C'est un système fermé : on note n_Σ la qté de matière du système.

À l'instant t_b : $P' = P = P_{n+1}$ (on se rappelle qu'à $t = t_b^+$ le piston comprime le gaz ce qui provoque la fermeture de ① et la séparation du réservoir et du corps de pompe).

Éq. d'état du GP :

$$P_{n+1}\left(V'_2 + V\right) = n_\Sigma R T_0$$

or $n_\Sigma = \underbrace{n_{\Sigma_p}}_{\text{qté de matière ds le corps de pompe à } t=0^+} + \underbrace{n_{\Sigma_r}}_{\text{qté de matière à } t=0^+ \text{ ds le réservoir}}$ (cf. instant $t = 0^+$)

avec $n_{\Sigma_r} = \dfrac{P_n V}{R T_0}$ et $n_{\Sigma_p} = \dfrac{P_0 V'_1}{R T_0}$. Finalement :

$$P_{n+1}\left(V'_2 + V\right) = P_n V + P_0 V'_1 \quad \text{donc} \quad P_{n+1} = \frac{P_0 V'_1 + P_n V}{V + V'_2}$$

⊛ Variante : Σ fermé et GP donc comme à t_a : $P = P' = P_n$

et à t_b : $P = P' = P_{n+1}$

on a $P_n\left(V + V'_a\right) = P_{n+1}\left(V + V'_2\right)$.

En considérant le système fermé Σ_p entre $t = 0^+$ et $t = t_a^-$

on a $P_n V'_a = P_0 V'_1$ donc $P_n V + P_0 V'_1 = P_{n+1}\left(V + V'_2\right)$ ok

3) $P_n = P_{lim} \Rightarrow P_n = P_{n+1}$ donc $P_{lim} = \dfrac{P_0 V'_1 + P_{lim} V}{V + V'_2}$ donc $P_{lim} = P_0 \dfrac{V'_1}{V'_2}$

Comme $V'_1 \neq 0$ (volume résiduel) il est impossible de faire le vide.

4) $$P_{n+1} - P_{lim} = \frac{P_n V + P_0 V'_1}{V + V'_2} - P_0 \frac{V'_1}{V'_2}$$

$$= \frac{P_n V V'_2 + \cancel{P_0 V'_1 V'_2} - P_0 V'_1 V - \cancel{P_0 V'_1 V'_2}}{(V + V'_2) V'_2}$$

$$= \frac{V}{V + V'_2} \left(P_n - P_0 \frac{V'_1}{V'_2} \right)$$

$$= \frac{V}{V + V'_2} (P_n - P_{lim})$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $\frac{V}{V + V'_2}$

donc $$\boxed{P_n - P_{lim} = \left(\frac{V}{V + V'_2} \right)^n (P_0 - P_{lim})}$$

$$\lim_{n \to +\infty} P_n - P_{lim} = \underline{0} \quad \text{car} \quad \frac{V}{V + V'_2} < 1.$$

$$\frac{P_n}{P_{lim}} = 1 + \left(\frac{1}{1 + V'_2 / V} \right)^n \left(\frac{P_0}{P_{lim}} - 1 \right)$$

$$\frac{P_n}{P_{lim}} = 1 + \left(\frac{1}{1 + V'_2 / V} \right)^n \left(\frac{V'_2}{V'_1} - 1 \right)$$

On trace $P^* = \frac{P_n}{P_{lim}}$ en fonction de n, avec $\frac{V'_2}{V} = 0{,}1$ et $\frac{V'_2}{V'_1} = 100$.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

A = 0.1 #V'_2/V
B = 100 #V'_2/V'_1

def P_star(n):
    return 1 + 1/(1+A)**n*(B-1)

n = np.arange(0,100,1)

plt.figure()
plt.plot(n,P_star(n),'ob', ms =1)
plt.xlabel(r'$n$')
plt.ylabel(r'$P^\star$')
plt.show()
```