

TD 1

Analyse dimensionnelle. Ordres de grandeurs.

Corrigé des exercices

Ex. 1 Grandeurs dérivées

1) Il faut connaître l'aire des figures planes usuelles :

- aire d'un carré : $A = a^2$, avec a la longueur du côté ;
- aire d'un rectangle : $A = a \times b$, avec a, b les longueurs des côtés ;
- aire d'un disque : $A = \pi r^2$, avec r le rayon (une longueur).

Dans tous ces exemples, l'aire est homogène à une longueur au carré. On généralise à toute surface : $\boxed{[\text{surface}] = L^2}$.

2) De même, il faut connaître le volume des figures tridimensionnelles usuelles :

- volume d'un cube : $V = a^3$, avec a la longueur d'une arête ;
- volume d'un pavé droit : $V = a \times b \times c$, avec a, b, c les longueurs des arêtes ;
- volume d'une boule : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, avec r le rayon (une longueur).

Dans tous les exemples, le volume est homogène à une longueur au cube. On généralise à tout volume : $\boxed{[\text{volume}] = L^3}$.

3) On peut manipuler les formules obtenues en 1) et 2) :

$$[\text{volume}] = L^3 = L^2 \times L \quad \text{donc} \quad \boxed{[\text{volume}] = [\text{surface}] \times L} \quad (1)$$

Cela est cohérent avec la formule du volume du pavé droit : $V = (a \times c) \times b = (\text{surface de la base}) \times \text{hauteur}$.

Le volume du cylindre est de la même forme : $V = (\text{surface de la base}) \times \text{hauteur}$, ici $\boxed{V = \pi r^2 \times h}$.

4) On utilise les définitions d'une vitesse et d'une accélération :

- vitesse : $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{[\text{vitesse}] = L \times T^{-1}}$.
- accélération : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{[\text{accélération}] = [\text{vitesse}] \times T^{-1} = L \times T^{-2}}$.

5) Deuxième loi de Newton : $\vec{F} = m\vec{a}$ avec m la masse d'un corps, $\vec{F}$ la résultante des forces, et $\vec{a}$ le vecteur accélération. Donc : $\boxed{[\text{force}] = M \times [\text{accélération}] = M \times L \times T^{-2}}$.

5) On utilise l'expression de l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ donc $\boxed{[\text{énergie}] = M \times [\text{vitesse}]^2}$ donc $[\text{énergie}] = M \times (LT^{-1})^2 = M \times L^2 \times T^{-2}$ donc $\boxed{[\text{énergie}] = M \times L^2 \times T^{-2}}$.

En réorganisant : $[\text{énergie}] = M \times L^2 \times T^{-2} = (M \times L \times T^{-2}) \times L$. donc $\boxed{[\text{énergie}] = [\text{force}] \times L}$. Cette dernière expression est cohérente avec l'expression du travail W d'une force F appliqué sur un objet parcourant la distance ℓ : $W = F \times \ell$.

6) D'après la définition de l'énoncé : $\boxed{[\text{puissance}] = [\text{énergie}] \times T^{-1} = M \times L^2 \times T^{-3}}$.

Or $[\text{énergie}] = [\text{force}] \times L$ donc $[\text{puissance}] = [\text{force}] \times L \times T^{-1}$ donc $\boxed{[\text{puissance}] = [\text{force}] \times [\text{vitesse}]}$.

7) D'après la définition de l'énoncé : $\boxed{[\text{pression}] = [\text{force}]/[\text{surface}] = [\text{force}] \times L^{-2}}$. Or $[\text{force}] = [\text{énergie}]/L$ donc $[\text{pression}] = [\text{énergie}]/(L \times L^2) = [\text{énergie}]/(L^3)$ donc $\boxed{[\text{pression}] = [\text{énergie}]/[\text{volume}]}$.

Ex. 2 Vérifier l'homogénéité d'une formule littérale

1) Portée d'un tir : $x = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{g}$.

Or $\sin(2\alpha)$ est sans dimension, $[v^2] = L^2 \times T^{-2}$ et $[g] = L \times T^{-2}$ donc :

$$[x] = \frac{L^2 \times T^{-2}}{L \times T^{-2}} = L, \quad \boxed{\text{donc la formule est homogène.}}$$

2) **Fréquence d'un pendule simple** : $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Or $[g/\ell] = L \times T^{-2} / L = T^{-2}$ donc $[f] = \sqrt{T^{-2}} = T^{-1}$, donc la formule est homogène.

3) **Suppression hydrostatique** : $\Delta p = \rho g h$.

Or $[\rho] = M \times L^{-3}$, $[g] = L \times T^{-2}$ et $[h] = L$ donc $[\Delta p] = M \times L^{-3} \times L \times T^{-2} \times L = M L^{-1} T^{-2}$. On retrouve bien la dimension d'une pression trouvée dans l'exercice Ex. 1, donc la formule est homogène.

4) **Rayon d'une orbite géostationnaire** : $r = \left(\frac{g R^2}{\Omega^2} \right)^{1/3}$.

Or $[g] = L \times T^{-2}$, $[R^2] = L^2$, donc $[g R^2] = L^3 \times T^{-2}$. De plus $[\Omega] = T^{-1}$ (car l'unité rad, qui est l'unité d'un angle, est sans dimension) donc $[\Omega^2] = T^{-2}$ ainsi :

$$\left[\frac{g R^2}{\Omega^2} \right] = \frac{L^3 \times T^{-2}}{T^{-2}} = L^3, \quad \text{donc} \quad [r] = (L^3)^{1/3} = L \quad \text{donc} \quad \text{la formule est homogène.}$$

5) **Longueur de Compton** : $\lambda_c = \frac{h}{m_e c}$.

D'après l'unité de la constante de Planck, $[h] = [\text{énergie}] \times T = (M \times L^2 \times T^{-2}) \times T = M \times L^2 \times T^{-1}$. De plus $[m_e c] = M \times (L \times T^{-1}) = M \times L \times T^{-1}$ donc

$$[\lambda_c] = \frac{M \times L^2 \times T^{-1}}{M \times L \times T^{-1}} = L, \quad \text{donc} \quad \text{la formule est homogène.}$$

Ex. 3 Unités de grandeurs dérivées

1) $[\text{force}] = [\text{masse}] \times [\text{accélération}] = M.L.T^{-2}$. On en déduit que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2) L'expression de l'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2} m v^2$, soit $[\text{énergie}] = [\text{masse}] \times [\text{vitesse}]^2 = M.L^2.T^{-2}$. On en déduit que $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

3) $[\text{puissance}] = [\text{énergie}]/[\text{temps}] = M.L^2.T^{-3}$, soit $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$.

De plus $[\text{tension}] = [\text{puissance}]/[\text{intensité}] = M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$, soit $1 \text{ V} = 1 \text{ W} \cdot \text{A}^{-1} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}$.

4) L'unité proposée sur le compteur électrique « kVA » n'est pas correctement écrite. Il faut lire $\text{kV} \cdot \text{A}$, soit $1000 \text{ V} \cdot \text{A}$. Or d'après la question précédente, $1 \text{ V} \cdot \text{A} = 1 \text{ W}$. Ainsi l'installation électrique de cette maison peut délivrer une puissance maximale de 12 kW. Les habitants pourront installer la borne de recharge dont la puissance est inférieure.

Ex. 4 Applications numériques et chiffres significatifs

1) $a = 2,75 \text{ m}$. La surface vaut $a = 7,56 \text{ m}^2$ (en ne gardant que trois chiffres significatifs).

2) Soit V le volume d'eau dans la piscine, $V = L \times \ell \times h = 9,4 \times 10^2 \text{ m}^3 = 9,4 \times 10^5 \text{ L}$. La notation en puissance de 10 permet d'afficher sans ambiguïté le bon nombre de chiffres significatifs. On pourrait être tenté d'écrire 940 m^3 , mais on aurait 3 chiffres significatifs, ce qui est un de plus que h qui n'en a que deux. **À savoir absolument** : $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$ ou $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$.

3) La longueur L de la piste est $L = (100,00 \pm 0,01) \text{ m}$ (connue au cm près). La durée de la course est $\tau = 9,81 \text{ s}$. La vitesse moyenne est $v = L/\tau = 10,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 36,7 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, en ne gardant que 3 chiffres significatifs. **Remarque** : $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = (10^{-3} \text{ km}) \cdot (\frac{1}{3600} \text{ h})^{-1} = 3,6 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.